Mathematics
مكتب مستشار الرياضيات في مصر

الإحصاء

الصف الثالث الثانوي

كتاب الطالب

الاســـم : ....

الفــصل : ....

المدرســة : ....

تأليف

أ/ كمال يونس كبشة

أ.د/ أحمد كامل الخولي

شركة سقارة للنشر

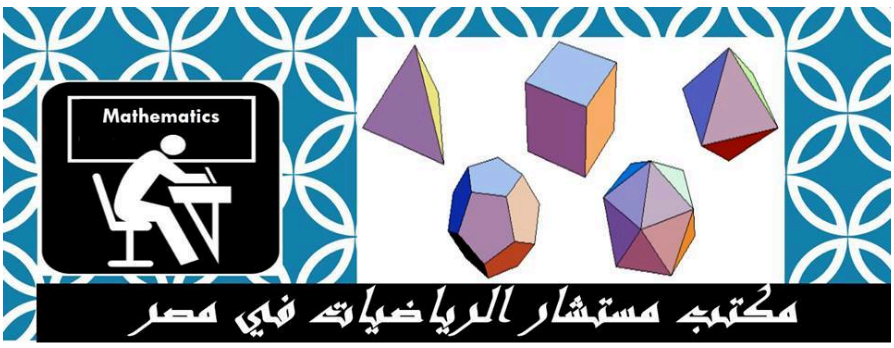
ش.م.م

SAKKARA PUBLISHING

الطبعــة الأولى ٢٠١٦/ ٢٠١٧

رقم الإيـــداع ٨٧٠١/ ٢٠١٦

الرقــم الدولى 978 - 977 - 706 - 029 - 5



المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلى:

١ تنمية وحدة المعرفة وتكاملها فى الرياضيات، ودمج المفاهيم والترابط بين كل مجالات الرياضيات المدرسية.

٢ تزويد المتعلم بما هو وظيفى من معلومات ومفاهيم وخطط لحل المشكلات.

٣ تبنّى مدخل المعايير القومية للتعليم فى مصر والمستويات التعليمية وذلك من خلال:

أ) تحديد ما ينبغى على المتعلم أن يتعلمه ولماذا يتعلمه.

ب) تحديد مخرجات التعلم بدقة، وقد ركزت على مايلى:

أن يظل تعلم الرياضيات هدف يسعى المتعلم لتحقيقه طوال حياته - أن يكون المتعلم محبًّا للرياضيات ومبادرًا بدراستها - أن يكون المتعلم قادرًا على العمل منفردًا أو ضمن فريق - أن يكون المتعلم نشطًا ومثابرًا ومواظبًا ومبتكرًا - أن يكون المتعلم قادرًا على التواصل بلغة الرياضيات.

٤ اقتراح أساليب وطرق للتدريس وذلك من خلال كتاب (دليل المعلم).

٥ اقتراح أنشطة متنوعة تتناسب مع المحتوى ليختار المتعلم النشاط الملائم له.

٦ احترام الرياضيات واحترام المساهمات الإنسانية منها على مستوى العالم والأمة والوطن، وتعرف مساهمات وإنجازات العلماء المسلمين والعرب والأجانب.

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

المحتويات

الوحدة الأولى: الارتباط والانحدار

١ - ١ الارتباط ٤

١ - ٢ الانحدار ١٦

ملخص الوحدة ٢٦

تمارين عامة ٢٧

اختبار تراكمي ٢٩

الوحدة الثانية: الاحتمال الشرطي

٢ - ١ الاحتمال الشرطي ٣٢

٢ - ٢ الأحداث المستقلة ٤١

ملخص الوحدة ٤٨

تمارين عامة ٤٩

اختبار تراكمي ٥١

المحتويات

الوحدة الثالثة: المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

٣ - ١ المتغير العشوائي المتقطع ٥٤

٣ - ٢ التوقع(الوسط) والتباين للمتغير العشوائى المتقطع ٦١

٣ - ٣ دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائى المتصل ٦٨

ملخص الوحدة ٧٣

تمارين عامة ٧٥

اختبار تراكمى ٧٧

الوحدة الرابعة: التوزيع الطبيعى

٤ - ١ التوزيع الطبيعى ٨٠

٤ - ٢ بعض التطبيقات العملية للتوزيع الطبيعى ٩٤

ملخص الوحدة ١٠٠

تمارين عامة ١٠١

اختبار تراكمى ١٠٣

اختبارات عامة ١٠٥

الارتباط والانحدار

Correlation and Regression

الوحدة ١

مقدمة الوحدة

الإحصاء (Statistics) هو أحد فروع الرياضيات المهمة ذات التطبيقات المتعددة حيث تهتم بجمع وتمثيل البيانات واختزالها فى صورة مؤشرات رقمية لوصف وقياس ملامحها الأساسية وتحليلها؛ بغرض اتخاذ القرارات المناسبة لما لها من أهمية تطبيقية واسعة فى شتى مجالات العلوم الفيزيائية والإنسانية والاقتصادية والاجتماعية وغيرها.

وتهتم هذه الوحدة بتحليل البيانات ذات المتغيرين وبدراسة درجة واتجاه العلاقة بين المتغيرين وشكل هذه العلاقة، فتهتم فى البداية بدراسة الارتباط (correlation) الذى يكشف عن درجة وقوة العلاقة بين متغيرين وقد تتخذ هذه العلاقة الشكل طرديًّا أو عكسيًّا، ومن الجدير بالذكر أن الارتباط يدرس العلاقة واتجاهها بين متغير وآخر، إلا انه يجب أن ندرك بأن هذه العلاقة لا تدل على السببية أو العلية، فهى لا تدل على وجود أثر لمتغير على آخر كما سيتضح من خلال الدرس الأول فى هذه الوحدة، كما تتناول هذه الوحدة أيضا دراسة الانحدار الخطى البسيط (Linear regression) الذى يهتم بتقدير شكل هذه العلاقة والذى يمكن من خلاله التنبؤ بقيمة المتغير التابع إذا علمنا قيمة المتغير المستقل، وتزداد دقته كلما كانت العينة مختارة بشكل عشوائى، وسوف نتناول فى هذه الوحدة بعض التقنيات الحديثة من آلات حاسبة علمية وبرامج إحصائية للحاسوب (مثل برنامج SPSS) فى إجراء الحسابات والقيام بالرسوم البيانية الخاصة بالارتباط والانحدار الخطى بين ظاهرتين.

أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف معنى الارتباط بين متغيرين.
- يحسب معامل الارتباط بين متغيرين بطرق مختلفة (طريقة بيرسون – طريقة سبيرمان) ويفسر معناها رياضيًّا.
- يفهم معنى خط الانحدار، ويقدر أهميته فى دراسة العلاقة بين متغيرين.
- يمثل العلاقة بين متغيرين فى مستوى كارتيزى، ويحكم من خلالها على وجود وقوة العلاقة.
- يتعرف معنى معامل الانحدار الخطى ويفسر ما يمكن أن يستدل عليه بمعرفة قيمة هذا المعامل.
- يُوجِد معادلة خط انحدار أى من المتغيرين على الآخر بطريقة المربعات الصغرى.
- يستخدم الآلة الحاسبة والحاسوب فى إجراء العمليات الحسابية والقيام بالرسوم البيانية الخاصة بكل من الارتباط والانحدار الخطى بين ظاهرتين.
- يستخدم معادلة خط انحدار معطاة فى التنبؤ بقيمة أحد المتغيرين بمعلومية القيمة المناظرة للمتغير الآخر.
- يطبق الارتباط والانحدار الخطى فى مواقف بحثية.
- يقدر إسهامات استخدام الارتباط والانحدار الخطى فى حل مشكلات حياتية ومجتمعية.

المصطلحات الأساسية

- الارتباط *Correlation*
- الانحدار *Regression*
- الارتباط الخطي *Linear Correlation*
- معامل الارتباط *Correlation Coefficient*
- ارتباط طردى *Direct Correlation*
- ارتباط عكسى *Inverse Correlation*
- شكل الانتشار *Scatter diagram*
- معامل ارتباط بيرسون *Pearson Correlation Coefficient*
- معامل ارتباط سبيرمان *Spearman Correlation Coefficient*
- خط الانحدار *Regression Line*
- المربعات الصغرى *Least Square*

دروس الوحدة

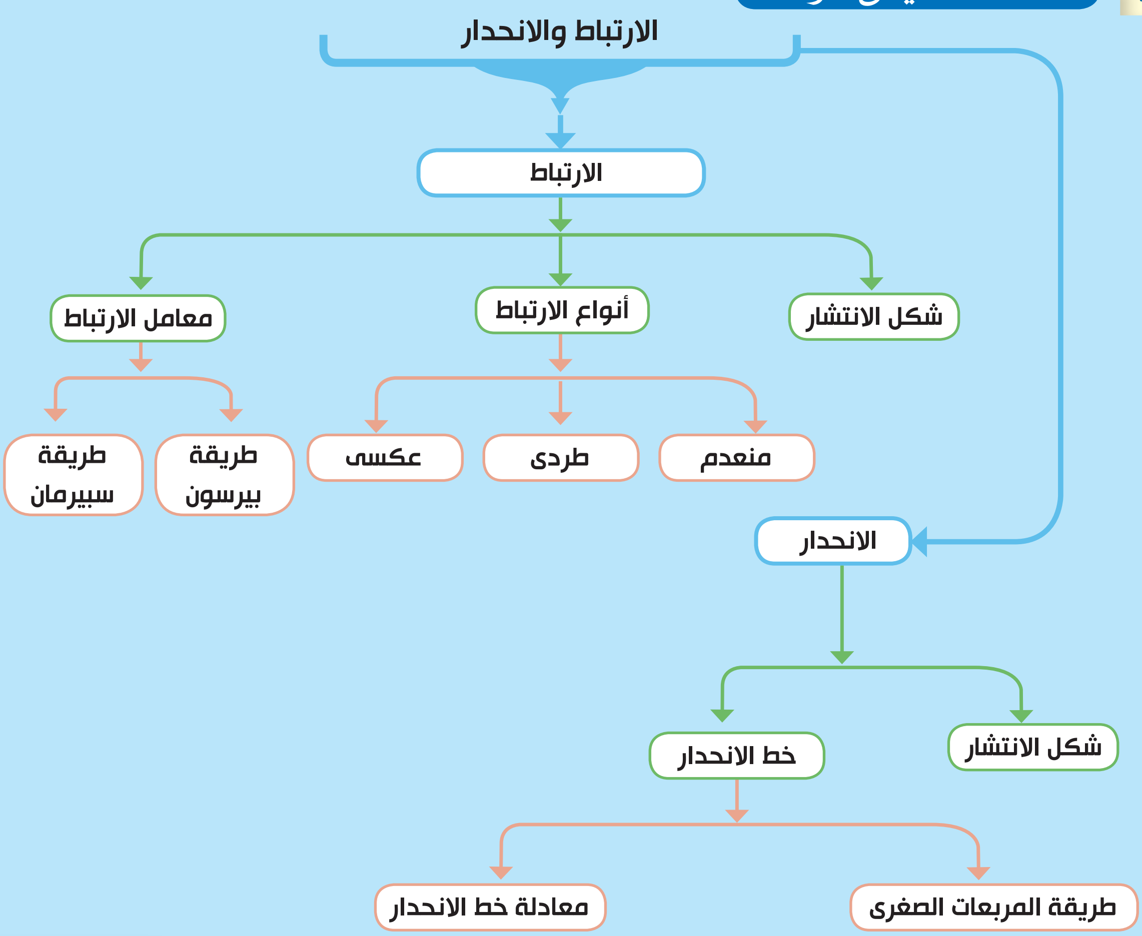
الدرس (١ - ١): الارتباط.

الدرس (١ - ٢): الانحدار.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية - برنامج الإكسيل - برنامج spss

مخطط تنظيمى للوحدة



الوحدة الأولى

١ - ١

الارتباط

Correlation

سوف تتعلم

- تعريف الارتباط
- شكل الانتشار
- الارتباط الطردى والارتباط العكسى
- معامل الارتباط الخطى
- معامل الارتباط الخطى لبيرسون
- معامل ارتباط الرتب لسبيرمان

المصطلحات الأساسية

- الارتباط Correlation
- الارتباط الخطى Linear Correlation
- معامل الارتباط Correlation Coefficient
- ارتباط طردى Direct Correlation
- ارتباط عكسى Inverse Correlation
- شكل الانتشار Scatter diagram
- معامل ارتباط بيرسون Pearson Correlation Coefficient
- معامل ارتباط سبيرمان (الرتب) spearman`s coefficient correltion

مقدمة:

سبق أن درست فى الإحصاء كيفية وصف مجموعة من البيانات التى تمثل ظاهرة وذلك باستخدام بعض المقاييس الإحصائية مثل مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت ومعامل الاختلاف، وفى هذا الدرس سوف تدرس كيفية وصف مفردات ظاهرتين مختلفتين من حيث العلاقة بينهما، بمعنى إذا تغير أحد المتغيرين فى اتجاه معين (بالزيادة أو النقصان) فإن المتغير الآخر يميل إلى التغير فى اتجاه معين أيضًا بالزيادة أو النقصان، ويُسمى الارتباط فى هذه الحالة ارتباطًا طرديًّا، وإذا تغير أحد المتغيرين نحو الزيادة اتجه الآخر نحو النقصان، والعكس صحيح، ويُسمى الارتباط فى هذه الحالة ارتباطًا عكسيًّا.

الارتباط:

فكر و ناقش

تأمل الأمثلة الآتية ودون ملاحظاتك عليها:

١- العلاقة بين طول ضلع المربع ومساحته .

٢- العلاقة بين الإصابة بضغط الدم والعمر.

٣- زيادة سعر الوحدة من سلعة ما ومدى الطلب على شرائها.

٤- انخفاض درجة الحرارة ومدى الطلب على استهلاك الوقود.

٥- العلاقة بين الارتفاع عن سطح البحر وارتفاع درجة الحرارة .

نلاحظ من الأمثلة السابقة أن:

- المتغيرين المرتبطين يتغيران بنفس الاتجاه، أى إن زيادة أو نقصان أحدهما يؤدى إلى زيادة أو نقصان الآخر كما فى الأمثلة ١، ٢، ٣ ويقال إن الارتباط بينهما موجب (طردى).

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.

نلاحظ فى المثالين (٤)، (٥) أن المتغيرين المرتبطين يتغيران باتجاه مُعاكِس، فالزيادة أو النقصان فى أحدهما تؤدى إلى نقصان أو زيادة فى الآخر، عندئذ يقال إن الارتباط بينهما سالب (عكسى) .

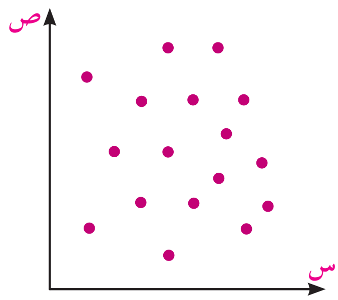
تعريف الارتباط هو طريقة إحصائية يمكن من خلالها تحديد درجة ونوع العلاقة بين متغيرين.

والعلاقة بين متغيرين تتراوح من الدرجة القوية إلى الدرجة الضعيفة، فعندما تكون العلاقة قوية فإن ذلك يعنى أن معرفة قيمة أحد المتغيرين يساعد فى التنبؤ بقيمة المتغير الآخر، وعندما تكون العلاقة ضعيفة فإن ذلك يعنى أن معرفة أحد المتغيرين لا يساعد فى التنبؤ بقيمة المتغير الآخر.
أن إحدى الطرق المهمة التى تساعدنا على التعرف على درجة العلاقة ونوعها بين متغيرين هى تحديد شكل الانتشار.

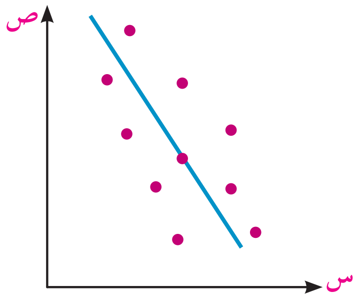
شكل الانتشار: *Scatter diagram*

تعريف شكل الانتشار هو تمثيل بيانى لعدد من الأزواج المرتبة (س، ص) لوصف العلاقة بين متغيرين.

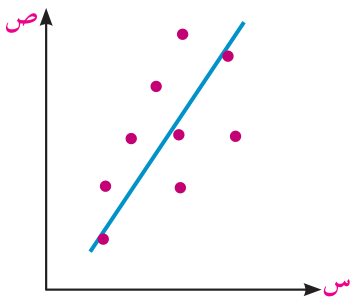
إذا رمزنا للظاهرة الأولى بالرمز (س) والظاهرة الثانية بالرمز (ص) فإن الأشكال التالية توضح العلاقة بين س، ص.
والتي توضح شكل الانتشار



شكل (١)
لا يوجد ارتباط



شكل (٢)
يوجد ارتباط خطى عكسى



شكل (٣)
يوجد ارتباط خطى طردى

الارتباط الخطي: *Linear Correlation*

تعريف يعرف الارتباط الخطي البسيط بأنه مقياس لدرجة العلاقة بين متغيرين.

نشاط

ارسم شكل الانتشار لكل من البيانات الآتية ثم اذكر نوع العلاقة التى تعبر عن تلك البيانات.

(١)

س	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
ص	١٣	١٤	١٧	١٨	٢١	٢٣

(٢)

س	٣	٤	٧	٨	١١	١٥
ص	٢٣	٢٢	٢٠	١٨	١٧	١٦

③

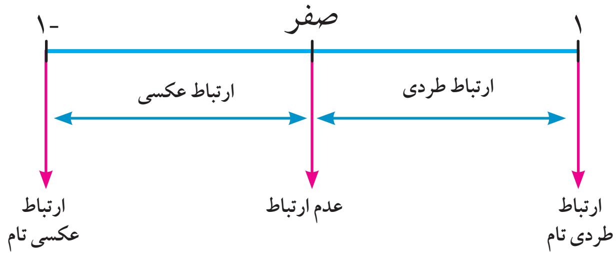
س	٧	٩	١١	١٣	١٥	١٦
ص	١٤	٧	٢٠	٦	١٢	١٠

معامل الارتباط *Correlation Coefficient*

معامل الارتباط يرمز له بالرمز (ر) وهو عبارة عن مقياس كمى نسبى يقيس قوة الارتباط بين متغيرين حيث -١ ≤ ر ≤ ١، ويقال إن الارتباط **طردى تام** إذا كان معامل الارتباط ر = ١، ويقال إن **الارتباط عكسى** تام إذا كان معامل الارتباط ر = -١، وينعدم الارتباط عندما ر = ٠

ونلاحظ أن:

كلما اقتربت قيمة معامل الارتباط من العدد ١ كان الارتباط الطردى بين المتغيرين قويًا، وكلما اقتربت قيمته إلى الصفر كان الارتباط الطردى ضعيفًا، وينطبق نفس القول على الارتباط العكسى. والشكل المجاور يوضح ذلك.



تعبير شفهى: اختيار من متعدد:

معامل الارتباط الأقوى فيما يلى هو:

أ -٠,٨ ب -٠,٥ ج ٠,٤ د ٠,٧

معامل ارتباط بيرسون *Pearson Correlation coefficient*

نفرض لدينا مجموعة مكونة من (ن) فردًا وحصلنا من هؤلاء الأفراد على بيانات عن قيم متغيرين س، ص فتكون البيانات أن التى لدينا على الصورة:

قيمة المتغير الأول س: $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، .... ، $س_ن$

قيمة المتغير الثانى ص: $ص_١$ ، $ص_٢$ ، $ص_٣$ ، .... ، $ص_ن$

إذا رمزنا لمعامل الارتباط بالرمز (ر)، فان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص أو معامل الارتباط الخطى يمكن إيجاده من العلاقة:

$$ر = \frac{ن\,مجـ\,س\,ص - (مجـ\,س \times مجـ\,ص)}{\sqrt{ن\,مجـ\,س^٢ - (مجـ\,س)^٢}\ \sqrt{ن\,مجـ\,ص^٢ - (مجـ\,ص)^٢}}$$

حيث: "مجـ" رمز التجميع وتقرأ مجموع.

ن ترمز الى عدد المفردات ،

$مجـ\,س = س_١ + س_٢ + س_٣ ...... + س_ن$ ،

$مجـ\,ص = ص_١ + ص_٢ + ص_٣ ...... + ص_ن$ ،

$مجـ\,س\,ص = س_١ص_١ + س_٢ص_٢ + س_٣ص_٣ ..... + س_نص_ن$

$مجـ\,س^٢ = س_١^٢ + س_٢^٢ + س_٣^٢ ...... + س_ن^٢$ ،

$مجـ\,ص^٢ = ص_١^٢ + ص_٢^٢ + ص_٣^٢ ...... + ص_ن^٢$

مثال

(١) الجدول التالى يبين الدرجات التى حصل عليها عشرة طلاب فى مادتى التاريخ والجغرافيا:

التاريخ س	٧٥	٨٠	٩٣	٦٥	٨٧	٧١	٩٨	٦٩	٨٤	٧٨
الجغرافيا ص	٨٢	٧٨	٨٦	٧٢	٩١	٨٠	٩٥	٧٣	٨٩	٧٤

والمطلوب حساب معامل ارتباط بيرسون بين س، ص وتحديد نوع الارتباط.

الحل

نُكوِّن الجدول التالى:

س	ص	س^٢	ص^٢	س ص
٧٥	٨٢	٥٦٢٥	٦٧٢٤	٦١٥٠
٨٠	٧٨	٦٤٠٠	٦٠٨٤	٦٢٤٠
٩٣	٨٦	٨٦٤٩	٧٣٩٦	٧٩٩٨
٦٥	٧٢	٤٢٢٥	٥١٨٤	٤٦٨٠
٨٧	٩١	٧٥٦٩	٨٢٨١	٧٩١٧
٧١	٨٠	٥٠٤١	٦٤٠٠	٥٦٨٠
٩٨	٩٥	٩٦٠٤	٩٠٢٥	٩٣١٠
٦٩	٧٣	٤٧٦١	٥٣٢٩	٥٠٣٧
٨٤	٨٩	٧٠٥٦	٧٩٢١	٧٤٧٦
٧٨	٧٤	٦٠٨٤	٥٤٧٦	٥٧٧٢
Σ س =٨٠٠	Σ ص =٨٢٠	Σ س^٢ =٦٥٠١٤	Σ ص^٢ =٦٧٨٢٠	Σ س ص =٦٦٢٦٠

$$\because \text{ر} = \frac{\text{ن} \Sigma \text{س ص} - (\Sigma \text{س} \times \Sigma \text{ص})}{\sqrt{\text{ن} \Sigma \text{س}^٢ - (\Sigma \text{س})^٢}\ \sqrt{\text{ن} \Sigma \text{ص}^٢ - (\Sigma \text{ص})^٢}}$$

$$\therefore \text{ر} = \frac{١٠ \times ٦٦٢٦٠ - (٨٠٠ \times ٨٢٠)}{\sqrt{١٠ \times ٦٥٠١٤ - (٨٠٠)^٢}\ \sqrt{١٠ \times ٦٧٨٢٠ - (٨٢٠)^٢}} = ٠,٨٦٠٦$$

$$= \frac{٦٠٠٦}{\sqrt{١٠١٤٠}\ \sqrt{٥٨٠٠}} \simeq ٠,٨٦٠٦$$

والارتباط طردى .

حاول أن تحل

(١) من بيانات الجدول الآتى:

س	٢٠	٢٣	٢٤	٢٥	٢٨	٣٠
ص	٣٥	٣١	٣٠	٢٧	٢٩	٢٨

احسب معامل ارتباط بيرسون " الخطى " بين س، ص وحدد نوعه.

استخدام الآلة الحاسبة العلمية:

تدعم الكثير من الآلات الحاسبة العلمية الموجودة بالأسواق إيجاد نواتج الأعمدة الموجودة فى الجدول السابق وحساب معامل الارتباط كالآتى:

تهيئة الآلة الحاسبة لنظام الإحصاء:

وذلك بالضغط على: MODE ثم 3

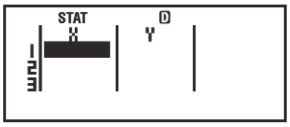
Statistical and regression calculations	MODE 3 (STAT)

نختار من القائمة المنسدلة:

Paired-variable (X, Y), linear regression (y = A + Bx)	2 (A+BX)

إدخال البيانات:

نملأ الجدول المبين بالشكل لجميع قيم (X، Y) وذلك بكتابة العدد الموجود في جدول = وبعد الانتهاء من كتابته نضغط حتى الانتهاء من كتابة جميع قيم (X، Y)



MODE 3 (STAT) 2 (A+BX)

استدعاء النواتج:

نضغط على المفاتيح: (STAT) 1 SHIFT فتعطى منها: 3:sum

ونختار من هذه القائمة كلًّا من:

$1 : \Sigma x^2$ ، $2 : \Sigma x$ ، $3 : \Sigma y^2$ ، $4 : \Sigma y$ ، $5 : \Sigma xy$

وذلك بالضغط على المفاتيح من ١ إلى ٥ كل على حدة.

لإيجاد معامل الارتباط (ر) نضغط المفاتيح التالية:

(STAT) ومن القائمة المنسدلة نضغط: 5 : Reg

ومن القائمة المنسدلة نضغط: 3 : r فيعطى ناتج معامل الارتباط المطلوب بين المتغيرين x ، y

نشاط

استخدم الآلة الحاسبة للتحقق من صحة حل المثال السابق.

برنامج SPSS الأحصائى

برنامج (spss) هو اختصار (Statistical package for social sciences) وهو ما يعني الحزم الإحصائية للعلوم الاجتماعية ، وبرنامج spss هو عبارة عن مجموعة من الحزم أو بيانات حسابية شاملة للقيام بتحليل هذه البيانات ، ويتم استخدام هذا البرنامج في الأبحاث العلمية التي تحتوي على بيانات رقمية .

يستطيع البرنامج القيام بقراءة كافة البيانات من كافة أنواع الملفات وتحليلها واستخراج النتائج والتقرير الإحصائية، والبرنامج يتيح للمستخدم تحرير البيانات وتعديلها في شكل متغيرات وبيانات جديدة باستخدام معادلة ، وكذلك حفظ البيانات في ملفات وتسميتها أو تعديل أسماء ملفات البيانات ، أو استرجاع البيانات والملفات والمشاهدات ،

وذلك من خلال التحكم في قائمة من الأوامر والخيارات المتاحة في البرنامج ، لتشمل كافة مراحل تحليل البيانات والعملية الإحصائية من **خلال أربع خطوات هي** :

١ - ترميز البيانات . **٢ -** وضع البيانات في البرنامج .

٣ - انتقاء الشكل المناسب واختبار البيانات وتحليلها .

٤ - تحديد البيانات المتغيرة المراد تحليلها وتحقيق عملية الإحصاء .

تشغيل برنامج spss :

يتم فتح وتشغيل برنامج spss عن طريق الضغط على نافذة ابدأ (Start) الموجودة في القائمة الرئيسية ، ثم نقم بالذهاب الى قائمة البرامج (Program) ، والبحث عن برنامج spss ونضغط علي مرتين ليفتح البرنامج

مكونات البرنامج ووظائفها:

لائحة الأوامر (Sntiocnd Funammoc):

وهو عبارة عن شريط الأوامر الخاصة بعمل البرنامج ، حيث يمكن للمستخدم اختيار الامر الذي يريده عن طريق الضغط على ايقونة كل أمر احصائي وبالتالي تعرض النتيجة في لائحة التقارير ، ولائحة الأوامر تشمل عدد تسع أوامر رئيسية والتي عند الضغط عليها يتفرع منها عدد من الأوامر فرعية ، بخلاف ايقونة مساعدة (Help).

بيئة عرض البيانات (Data View) :

هي عبارة عن بيئة يقوم المستخدم بالتحكم في إضافة البيانات التابعة لكل متغير أو إلغائها ، حيث يقوم المستخدم بإيداع أي متغير مستقل في عمود (Column) على شاشة البيانات، حيث يستطيع المستخدم التحويل لعرض ومشاهدة المتغيرات عن طريق الضغط والتنقل بين الامرين (Data View) و (Variable View)، الموجودين اسفل يسار شاشة المتغيرات.

شاشة المتغيرات :

شاشة تعريف البيانات المتغيرة ، والتي تحتوي على أعمدة متوازية ، حيث يحتوي كلم عمود (Column) على البيانات الخاصة بكل متغير ، ولعرض تعريف كل متغير ، يقوم لمستخدم بالضغط بزر الماوس مرتين (Double Click) ، أو يمكنه الضغط على الأمر (Variable View) الموجود أسفل يسار شاشة التعريفات ، وعندها يتغير شكل الشاشة ويظهر شريط عناوين :

- **الاسم** Name - **النوع** Type
- **الحجم** Width - **الترميز** Values

وعند الضغط عليه يظهر الترميز ، ومن ثم نضغط على زر (Add) لعرض قيمة الرمز والوضع .

خطوات يمكن للمستخدم التحكم فيها :

(١) إمكانية استرجاع البيانات السابقة : يمكن التحكم في استرجاع البيانات والملفات عن طريق الضغط على زر ملف (File) ثم الضغط على الأمر فتح (Open) ثم يقوم المستخدم باختيار الملف الذي يحتوي على البيانات المراد استرجاعها والتي تشمل التقارير الإحصائية التي تم عملها مسبقا ثم الضغط على حفظ (Save) .

(٢) حفظ المتغيرات الجديد في ملف : يمكن للمستخدم حفظ المتغيرات في ملف ، عن طرق الضغط على الامر (Save) أو الامر (Save as) ليتم الحفظ و إعطاء الملف الجديد الاسم الذي يختاره .

(٣) إضافة التعديلات وإدارة المتغيرات : يقوم المستخدم الذهاب الى نافذة محرر البيانات (Data Editor) واضافة البيانات التي يريدها ، **حيث يستطيع :**

- تعديل قيمة البيانات .
- تعريف المتغيرات ، من تحديد نوعية البيانات التي تم إضافتها، والمؤشرات الاقتصادية وكافة المتغيرات.

(٤) يستطيع المستخدم إضافة متغير جديد ، وعرض ومشاهدة ترتيب المشاهدات التي حدثت عن طريق استخدام الأمر الرئيسي (Data) ثم اتباع كل تغير يريد من إضافة متغير أو اضافة مشاهدة جديدة أو تعديل ترتيب البيانات .

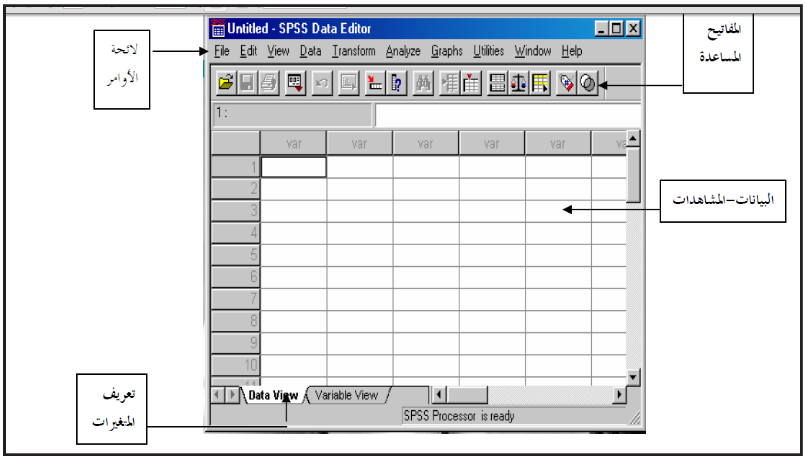
(٥) تكوين متغير جديد كليا عن طريق استخدام معادلة ، حيث يذهب الى القائمة الرئيسية (Transform)، ثم الانتقال إلى المربع الجانبي (Compute) وبعد ذلك يقوم بتحديد اسم المتغير الجديد في قائمة (Targer Variable)

(٦) إمكانية إلغاء أي متغير أو إلغاء مشاهدة .

(٧) ترتيب المشاهدات ، حيث يقوم البرنامج بإنشاء متغير جديد يحتوي على رقم تسلسلي ليتم ترتيب المشاهدات تصاعديا أو تنازليا .

(٨) إجراء عملية إحصاء وتحديد الوصف الإحصائي وتدرجه وتكرار البيانات .

(٩) إمكانية عمل تمثيل للمتغيرات من خلال إنشاء رسم بياني ، لعرض تحليل المتغيرات وتفسير ما تم في المتغيرات الجديدة.



نشاط

استخدم الشبكة العنكبوتية فى تحميل برنامج (SPSS) من الموقع : */http://www-01.ibm.com/software/analytics/spss*
ثم تحقق من صحة حل المثال السابق.

مثال

(٢) أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص وحدد نوعه. إذا كـان:

$\sum$ س = ٦٨ $\sum$ ص = ٣٦ $\sum$ س ص = ٣٤٨

$\sum$ س^2 = ٦٢٠ $\sum$ ص^2 = ٢٠٤   ن = ٨

الحل

$$\because \text{ر} = \frac{\text{ن} \sum \text{س ص} - (\sum \text{س} \times \sum \text{ص})}{\sqrt{\text{ن} \sum \text{س}^{٢} - (\sum \text{س})^{٢}} \sqrt{\text{ن} \sum \text{ص}^{٢} - (\sum \text{ص})^{٢}}}$$

$$\because \text{ر} = \frac{٨ \times ٣٤٨ - (٦٨ \times ٣٦)}{\sqrt{٨ \times ٦٢٠ - (٦٨)^{٢}} \sqrt{٨ \times ٢٠٤ - (٣٦)^{٢}}} = \frac{٣٣٦}{\sqrt{٣٣٦} \sqrt{٣٣٦}} = ١$$

قيمة معامل الارتباط (+ ١) تعنى أن هذه العلاقة طردية تامة بين المتغيرين س، ص.

حاول أن تحل

(٢) أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص وحدد نوعه. إذا كان:

$\sum \text{س} = ٩٢$ $\sum \text{ص} = ٣٦$ $\sum \text{س ص} = ٣٧٢$

$\sum \text{س}^{٢} = ١١٠٠$ $\sum \text{ص}^{٢} = ٢٠٤$ $\text{ن} = ٨$

معامل ارتباط سبيرمان (الرتب) *Spearman's Rank Correltion Coefficient*

فكر و ناقش

قام إحصائي بدراسة العلاقة بين تقديرات مادتين دراستين لسبع طلاب ودوَّن النتائج فى الجدول التالى :

المادة الأولى	ضعيف	مقبول	ضعيف	جيد	ضعيف	ممتاز	جيد جدًا
المادة الثانية	ضعيف	مقبول	جيد	مقبول	ضعيف	جيد جدًا	مقبول

فإذا أراد هذا الإحصائى أن يقف على مدى العلاقة بين هاتين المادتين و إيجاد معامل للارتباط بينهما فهل يمكنك مساعدته فى ذلك؟

لا نستطيع استخدام معامل ارتباط بيرسون فى بند فكر و ناقش لأنه يعتمد على البيانات الكمية (العددية) فقط، ولكن فى حالة البيانات الوصفية (كما فى البند السابق) فإنه يمكن استخدام معامل ارتباط آخر يعرف بمعامل ارتباط الرتب لسبيرمان، وهو يعطى مقياسًا للارتباط فى كل من البيانات الكمية والوصفية التى لها صفة الترتيب كما فى البند السابق، و يعتمد هذا المعامل على ترتيب قيم المتغيرات مع الأخذ فى الاعتبار الترتيب التصاعدى أو التنازلى ثم نستخدم العلاقة الآتية:

$$\text{ر} = ١ - \frac{٦ \sum \text{ف}^{٢}}{\text{ن}(\text{ن}^{٢} - ١)}$$

حيث ف هى الفرق بين رتب المتغيرين س، ص، ن هى عدد قيم كل من المتغيرين.

لاحظ أن

معامل ارتباط سبيرمان يمكن حسابه سواءً كانت البيانات كمية أو وصفية، بينما معامل ارتباط بيرسون لا يمكن حسابه إلا على المتغيرات الكمية فقط.

يتميز معامل سبيرمان لارتباط الرتب بسهولته حتى لو كانت البيانات غير مرتبة.

يُؤخذ على معامل سبيرمان إهماله لفروق الأعداد عند حساب الرتب وبالتالى فهو أقل دقة.

مثال

٣ أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان فى بند فكر وناقش السابق وحدد نوعه .

الحل

فى هذا المثال نرتب الظاهرتين ترتيبًا تصاعديًّا منتظمًا وذلك بأن تعطى كل طالب رتبة تقدير لمادة، وكذلك المادة الثانية للطالب نفسه كما فى الجدول الآتى :

المادة الأولى	ضعيف	مقبول	ضعيف	جيد	ضعيف	ممتاز	جيد جدًا
الترتيب مع التكرار	١	٤	٢	٥	٣	٧	٦
الترتيب النهائى	٢	٤	٢	٥	٢	٧	٦

نلاحظ أن الحالة (ضعيف) تكررت ٣ مرات وشغلت الأماكن ١، ٢، ٣

لذلك تكون رتبة كل منها = $\frac{١ + ٢ + ٣}{٣} = ٢$ (وهو الوسط الحسابى للأعداد ١، ٢، ٣) وبالمثل:

المادة الثانية	ضعيف	مقبول	جيد	مقبول	ضعيف	جيد جدًا	مقبول
الترتيب مع التكرار	١	٣	٦	٤	٢	٧	٥
الترتيب النهائى	١,٥	٤	٦	٤	١,٥	٧	٤

نلاحظ أن المستوى (ضعيف) تكرر مرتين وشغل الأماكن ١، ٢

لذلك تكون رتبة كل منها = $\frac{١ + ٢}{٢} = ١,٥$ (وهو الوسط الحسابى للعددين ١، ٢)

كذلك المستوى(مقبول) تكرر ثلاث مرات وشغل الأماكن ٣، ٤، ٥

لذلك تكون رتبة كل منها = $\frac{٣ + ٤ + ٥}{٣} = ٤$ نلخص الحل فى الجدول الآتى :

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف٢
ضعيف	ضعيف	٢	١,٥	٠,٥	٠,٢٥
مقبول	مقبول	٤	٤	صفر	صفر
ضعيف	جيد	٢	٦	٤ –	١٦
جيد	مقبول	٥	٤	١	١
ضعيف	ضعيف	٢	١,٥	٠,٥	٠,٢٥
ممتاز	جيد جدًا	٧	٧	صفر	صفر
جيد جدًا	مقبول	٦	٤	٢	٤
					٢١,٥

$\because$ ر $= ١ - \frac{٦ \text{مجـ} ف^٢}{ن(ن^٢-١)}$ $\therefore$ ر $= ١ - \frac{٦ \times ٢١,٥}{٧(٤٩ - ١)}$

$= ١ - \frac{١٢٩}{٣٣٦} \simeq ٠,٦١٦١$ وهو ارتباط طردى

حاول أن تحل

③ فى دراسة عن مدى العلاقة بين مستوى الطلاب فى مادتى الإحصاء والرياضيات وجد أن تقديرات ستة طلاب فى المادتين كالتالى:

تقدير الإحصاء (س)	مقبول	جيد جدًّا	ممتاز	جيد جدًّا	مقبول	مقبول
تقدير الرياضيات (ص)	جيد	جيد	جيد جدًّا	ممتاز	جيد	ضعيف

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين التقديرات وحدد نوعه .

مثال

④ احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س، ص وذلك من بيانات الجدول التالى:

س	٤	٧	٨	٥	٨	١٢
ص	٧	٦	٦	٤	٦	١٠

الحل

نكون الجدول الآتى:

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف^٢
٤	٧	٦	٢	٤	١٦
٧	٦	٤	٤	٠	٠
٨	٦	٢,٥	٤	١,٥-	٢,٢٥
٥	٤	٥	٦	١-	١
٨	٦	٢,٥	٤	١,٥-	٢,٢٥
١٢	١٠	١	١	٠	٠
					٢١,٥

$\because$ ر $= ١ - \frac{٦ \text{مجـ} ف^٢}{ن(ن^٢-١)}$ $\therefore$ $= ١ - \frac{٦ \times ٢١,٥}{٦(٣٦ - ١)}$ $\simeq ٠,٣٨٥٧$ والارتباط طردى

تفكير ناقد: هل يختلف مجـ ف^٢ إذا رتبنا الظاهرتين س، ص ترتيبًا تصاعديًّا؟ فسر إجابتك

حاول أن تحل

④ احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س، ص وحدد نوعه وذلك من بيانات الجدول التالى:

س	١٠	٧	٨	٧	٦	٤
ص	٥	٨	٧	٩	٩	١٠

تمارين ١ – ١

أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات التالية:

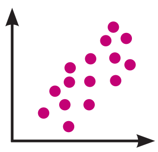
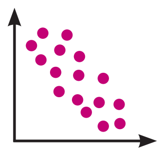
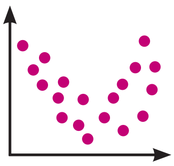
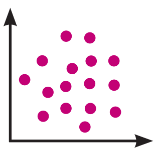
(١) معامل الارتباط الأقوى فيما يلي هو :

(أ) – ٠,٩٤   (ب) صفر   (ج) ٠,٥   (د) ٠,٨٥

(٢) أقوى معامل ارتباط عكسى فيما يلى هو :

(أ) –٠,٢   (ب) –٠,٥   (ج) –٠,٧   (د) –٠,٨

(٣) شكل الانتشار الذى يمثل ارتباط عكسى هو:

(أ) 
(ب) 
(ج) 
(د) 

(٤) أضعف معامل ارتباط فيما يلى هو:

(أ) -١,٢   (ب) -٠,٧   (ج) ٠,١٢   (د) ٠,٩

(٥) أحد الأعداد التالية يمكن أن يمثل أقوى معامل ارتباط عكسي بين متغيرين:

(أ) ٠,٣   (ب) ٠,٩   (ج) -١,١   (د) -٠,٩٥

(٦) من بيانات الجدول الآتى:

س	١٢	١٠	١٤	١١	١٢	٩
ص	١٨	١٧	٢٣	١٩	٢٠	١٥

أولًا: احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين المتغيرين س، ص

ثانيًا: احسب معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين س، ص

(٧) من بيانات الجدول الآتى:

س	٧	٧	٨	٣	٧	١١
ص	٨	٤	١٢	٢	١٠	١١

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين المتغيرين س، ص

(٨) من بيانات الجدول الآتى :

س	١	٣	٤	٦	٧	٩
ص	٦	٤	٤	٣	٢	١

احسب معامل الارتباط لبيرسون بين قيم س، ص مبينًا نوعه.

(٩) من بيانات الجدول الآتى :

س	٦	٥	٧	٨	١٠	٦	٧
ص	٤	٧	٥	٦	٨	٧	٨

احسب معامل الارتباط لبيرسون بين قيم س، ص وحدد نوعه .

١٠ من بيانات الجدول الآتى:

س	٣	١	٦	٤	٣	٨
ص	٧	٤	٥	٨	٦	٧

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س، ص وحدد نوعه.

١١ من بيانات الجدول الآتى:

س	جيد جدًّا	جيد جدًّا	جيد	ضعيف	مقبول	جيد جدًّا
ص	جيد	مقبول	جيد	ممتاز	جيد جدًّا	مقبول

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س، ص.

١٢ أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص وحدد نوعه إذا كان:

مجـ س = ٢٢٠   مجـ ص = ١٤٠   مجـ س ص = ٢٦٥٨

مجـ $س^٢$ = ٥٤٨٦   مجـ $ص^٢$ = ٢٢٩٢   ن = ١٠

١٣ الربط بالتجارة: الجدول الآتى يوضح مجموعة مكونة من ٦ كتب طبقًا لسعرها (س) وحجم المبيعات (ص):

السعر (س)	منخفض	منخفض جدًّا	متوسط	مرتفع جدًّا	مرتفع	مرتفع جدًّا
حجم المبيعات (ص)	مرتفع	مرتفع	مرتفع جدًّا	منخفض	متوسط	منخفض

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين سعر الكتاب وحجم مبيعاته.

١٤ الربط بالدعاية: أرادت إحدى الشركات دراسة العلاقة بين إنفاقها على الدعاية س (بالألف جنيه) وحجم مبيعاتها ص (بالألف وحدة). فإذا علمت أن بيانات فروع الشركة الثمانية كانت كالآتى:

س	١٩	١٨	٧	١٠	٤	١٣	١٥	٥
ص	١٢	١٠	٧	٩	٦	١٣	١٤	١٢

فأوجد معامل ارتباط الرتب بين حجم الإنفاق على الدعاية وحجم المبيعات مبينا نوع الارتباط .

١٥ الربط بالتعليم: البيانات التالية تمثل درجات عشرة طلاب فى مادتى الكيمياء والأحياء.

الكيمياء	٦٠	٨٥	٥٥	٩٠	٦٥	٥٠	٨٠	٧٠	٩٥	٧٥
الأحياء	٥٥	٧٥	٥٠	٩٥	٦٠	٦٥	٨٥	٨٠	٩٠	٧٠

احسب معامل الارتباط الخطى لبيرسون وحدد نوعه .

١٦ الربط بالمواليد: فى دراسة لتحديد العلاقة بين عمر الأم وعدد أطفالها. جاءت البيانات كما يلى :

عُمر الأم	١٨	٢٠	٢٣	٢٧	٢٩	٣٢	٣٣	٣٥
عدد الأطفال	٢	١	١	٢	٣	٤	٣	٥

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان وحدد نوعه.

الانحدار

Regression

سوف تتعلم

- تعريف الانحدار
- أنواع الانحدار
- معادلة خط الانحدار
- طريقة المربعات الصغرى
- أنشطة على إيجاد معادلة خط الانحدار .

المصطلحات الأساسية

- الانحدار *Regression*
- خط الانحدار *Regression Line*
- المربعات الصغرى *Least Square*

تمهيد

سبق أن درست الدالة، وتعرفت الشكل البيانى لها، كما تعرفت فى الدرس السابق شكل الانتشار، وعلمت أن الهدف من رسمه هو تحديد طبيعة العلاقة بين المتغيرين س ، ص من خلال البيانات المتعلقة بهما كما علمت أن خصائص الارتباط بين ظاهرتين يمكن أن تأخذ إحدى الصور الآتية :

- **علاقة خطية** Linear Relationship
- **علاقة خطية عكسية** Negative Linear Relationship
- **علاقة غير خطية** Non-Linear Relationship
- **لا توجد علاقة** No Relationship

تذكر أن

- الدالة هى علاقة بين مجموعتين س، ص بحيث يكون لكل عنصر من عناصر س عنصر وحيد من عناصر ص.
- تتحدد الدالة متى عُلم كل من: المجال – المجال المقابل – قاعدة الدالة

وفى هذا الدرس سوف ندرس كيفية تحديد معادلة خط الانحدار Equation of Regression Line والهدف من هذه الدراسة هو مساعدة الباحث على معرفة نوع البيانات المعطاة و إجراء تنبؤات صحيحة من خلالها .

تعريف الانحدار هو أسلوب إحصائى يمكن بواسطته تقدير قيمة أحد المتغيرين بمعلومية قيمة المتغير الآخر.

وله عدة أنواع :

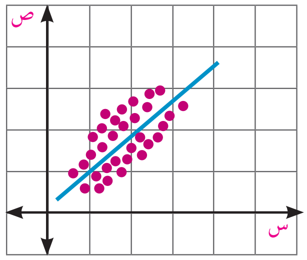
أ **الانحدار الخطى البسيط :** و يعتمد فيه المتغير التابع (ص) على متغير واحد (س) من خلال علاقة خطية .

ب **الانحدار المتعدد :** و يعتمد فيه المتغير التابع (ص) على أكثر من متغير مستقل .

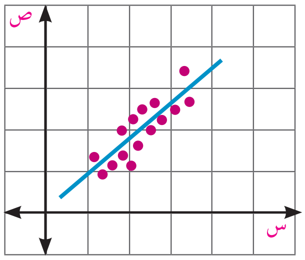
جـ **الانحدار غير الخطى :** إذا كانت العلاقة بين المتغير التابع (ص) والمتغيرات المستقلة غير خطية (من الدرجة الثانية أو الثالثة أو أسية أو لوغاريتمية أو .....)

وسنقتصر فى هذا الدرس على الانحدار الخطى البسيط فقط . و**الأشكال التالية** توضح العلاقة بين قيمة معامل الارتباط واختلاف وضع النقاط على خط الانحدار . وكلما اقتربت النقاط من الانطباق على هذا الخط زادت أو نقصت قيمة (ر) الى أن تصل إلى انطباق جميع النقاط على الخط وفى هذه الحالة تكون قيمة (ر) إما (+ ١) أو (- ١).

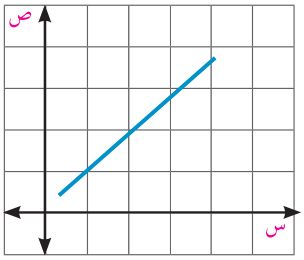
الأدوات المستخدمة آلة حاسبة علمية. برنامج SPSS للحاسوب. برنامج : *Microsoft Exceel*.



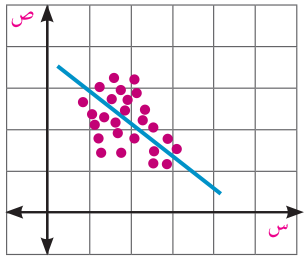
(١) ارتباط طردى متوسط



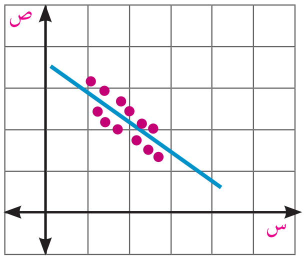
(٢) ارتباط طردى قوى



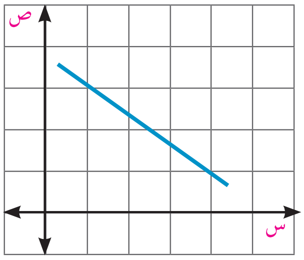
(٣) ارتباط طردى تام



(٤) ارتباط عكسى متوسط



(٥) ارتباط عكسى قوى



(٦) ارتباط عكسى تام

معادلة خط الانحدار *Equation of Regression Line*

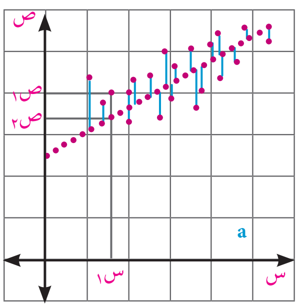
سبق أن درسنا فى الهندسة التحليلية معادلة الخط المستقيم الذى ميله م ويقطع جزءًا من محور الصادات مقداره جـ وهى : ص = م س + جـ .

وبالعودة إلى أشكال الانتشار الموضحة سابقًا نجد أنه إذا بدا شكل الانتشار كما فى أى من الشكلين (٢) أو (٥) فإن هذا يشير بصفة مبدئية بأن العلاقة بين المتغيرين خطية؛ لأننا نستطيع أن نتصور وجود خط مستقيم تقع النقط من حوله وقريبة منه وإن كانت لا تقع جميعها عليه، أما إذا بدا شكل الانتشار كما فى أى من الشكلين (١) أو (٤) فإننا نشك فى خطية العلاقة بين المتغيرين. ولذا فإن مهمتنا الأساسية هى استخدام أزواج القيم (س ر ، ص ر) المشاهدة لإيجاد أفضل خط مستقيم يلائم مجموعة نقط العينة ولتكن معادلته هى:

ص = أ + ب س

والطريقة الأكثر شيوعًا لإيجاد أفضل قيم لـ أ ، ب تسمى طريقة المربعات الصغرى.

طريقة المربعات الصغرى: *Least Square Method*



علمنا مما سبق أنه فى حالة الارتباط ليس بالضرورة أن تقع جميع النقاط على خط الانحدار ، لذلك يكون هناك نسبة خطأ للنقاط التى لا تقع على خط الانحدار، وللحصول على أفضل خط الانحدار يجب تقليل الانحرافات لأصغر قيمة ممكنة (خط الانحدار المناسب يمر أو يقترب بأكبر عدد من نقاط الانتشار) فإذا كان (س، ص) هى إحدى النقط الحقيقية للبيانات وكانت (س، ص̂) هى النقطة الواقعة على خط الانحدار (ص̂ تقرأ ص هات) فإن خط الانحدار المناسب عندما يكون |ص̂ - ص| اقل مايمكن لجميع قيم س أو عندما Σ(ص̂ - ص)^2 اقل مايمكن

وبفرض معادلة خط الانحدار هى ص̂ = أ + ب س

$\therefore$ الفرق المطلق = $\left| (\text{أ} + \text{ب}\,\text{س}) - \text{ص} \right|$

والمطلوب تعيين قيمتى أ ، ب بحيث يكون الفرق المطلق اقل ما يمكن وذلك بحل المعادلتين الآتيتين:

$\sum \text{ص} = \text{ن}\,\text{أ} + \text{ب} \sum \text{س}$ (١) ، $\sum \text{س}\,\text{ص} = \text{أ} \sum \text{س} + \text{ب} \sum \text{س}^2$ (٢)

حيث من المعادلة (١) $\text{أ} = \dfrac{\sum \text{ص} - \text{ب} \sum \text{س}}{\text{ن}}$ وبالتعويض فى (٢)

$\text{ب} = \dfrac{\text{ن} \sum \text{س}\,\text{ص} - (\sum \text{س})(\sum \text{ص})}{\text{ن} \sum \text{س}^2 - (\sum \text{س})^2}$ تسمى بمعامل انحدار ص على س وهى تعبر عن ميل خط الانحدار على الاتجاه الموجب لمحور السينات .

وتستخدم معادلة خط انحدار ص على س فى:

١- التنبؤ بقيمة ص إذا علمت قيمة س

٢- تحديد مقدار الخطأ الذى يتحدد من العلاقة :

مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية - القيمة التى تحقق معادلة الانحدار|

ملاحظة: عند استخدام معادلة الانحدار فى التنبؤ (التقدير) يفضل ألا نتجاوز كثيرًا مدى المتغير س المستخدم فى حساب معادلة الانحدار.

تفكير ناقد: قيمة معامل الانحدار تدل على الارتباط. فسر هذه العبارة.

مثال

(١) الجدول التالى يمثل إنتاج أحد المحاصيل الصيفية (ص) من المساحة المنزرعة (س) بالفدان :

المساحة المزروعة (س) بالفدان	٥٠	٢٠٠	١١٠	٨٠	١٢٠	٧٤,٥	٨٨,٩	٥,٧	١١	٣,٢
الإنتاج (ص) بالكيلوجرام	١٤٠	٥٠٠	٤٠٠	٣٠٠	٣٥٦	٢٤٠,٥	٢٠٠,٦	٣٣,٥	٦٩,٨	١٨,٧

أولًا : أوجد معادلة خط الانحدار.

ثانيًا : تنبأ بقيمة الإنتاج بالكيلوجرام إذا كانت المساحة المزروعة تساوى ١٠٠ فدان.

ثالثًا : أوجد مقدار الخطأ فى الإنتاج إذا علمت أن المساحة المزروعة ١٢٠ فدانًا.

الحل

الحل باستخدام الآلة الحاسبة العلمية:

١ - إدخال البيانات :

نتبع نفس الطريقة السابق شرحها فى مثال (١) فى الدرس السابق (الارتباط) لإدخال البيانات.

٢- استدعاء النواتج :

نضغط على المفاتيح التالية :

نستخدم المفاتيح التالية لإيجاد نواتج العمليات الآتية : (STAT) 1 SHIFT

نختار من القائمة المنسدلة : sum : 3 ونضغط على المفتاح 3

تظهر لنا قائمة أخرى جديدة من ١ إلى ٨ (مجاميع النواتج) نختار منها الآتى :

$٢ : \Sigma x = ٧٤٣,٣$ $\qquad$ $٤ : \Sigma y = ٢٢٥٩,١$

$١ : \Sigma x^{٢} = ٨٩٠١٧,١٩$ $\qquad$ $٥ : \Sigma xy = ٢٥٤٤٨٩,١٨$

أولًا : نحسب قيمة الثابت ب من العلاقة :

$$\text{ب} = \frac{\text{ن} \sum \text{س ص} - \sum \text{س} \sum \text{ص}}{\text{ن} \sum \text{س}^{٢} - (\sum \text{س})^{٢}}$$

$$= \frac{١٠ \times ٢٥٤٤٨٩,١٨ - ٧٤٣,٣ \times ٢٢٥٩,١}{١٠ \times ٨٩٠١٧,١٩ - (٧٤٣,٣)^{٢}} \simeq ٢,٥٦٣٧$$

نحسب قيمة الثابت أ من العلاقة : $\text{أ} = \overline{\text{ص}} - \text{ب}\ \overline{\text{س}}$

حيث : $\overline{\text{س}} = \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}}$ ، $\overline{\text{ص}} = \frac{\sum \text{ص}}{\text{ن}}$

$\therefore$ $\overline{\text{س}} = \frac{٧٤٣,٣}{١٠} = ٧٤,٣٣$ ، $\overline{\text{ص}} = \frac{٢٢٥٩,١}{١٠} = ٢٢٥,٩١$

$\therefore$ $\text{أ} = ٢٢٥,٩١ - ٢,٥٦٣٧ \times ٧٤,٣٣ \simeq ٣٥,٣٥$

ملاحظة :

يمكن حساب الثابت أ مباشرة كالآتى:

$\because$ $\text{أ} = \frac{\sum \text{ص} - \text{ب} \sum \text{س}}{\text{ن}}$ $\qquad$ $\therefore$ $\text{أ} = \frac{٢٢٥٩,١ - (٢,٥٦٣٧ \times ٧٤٣,٣)}{١٠} \simeq ٣٥,٣٥$

$\therefore$ معادلة خط الانحدار هى : $\hat{\text{ص}} = ٢,٥٦٤\ \text{س} + ٣٥,٣٥$

ثانيًا : من معادلة خط الانحدار : $\hat{\text{ص}} = \text{أ} + \text{ب س}$

$\because$ $\hat{\text{ص}} = ٢,٥٦٤\ \text{س} + ٣٥,٣٥$ $\qquad$ وبالتعويض عن س = ١٠٠

$\therefore$ $\hat{\text{ص}} = ٢,٥٦٤ \times ١٠٠ + ٣٥,٣٥ = ٢٩١,٧٢$ كيلوجرام

يمكن التحقق من صحة الناتج باستخدام الآلة الحاسبة كالآتى:

100 SHIFT 1 (STAT) 5 (Reg) 5 : $\hat{y}$ =

ثالثا : لإيجاد مقدار الخطأ فى الإنتاج إذا علمت أن س = ١٢٠ فدانًا

$\because$ $\hat{\text{ص}} = ٢,٥٦٤\ \text{س} + ٣٥,٣٥$

$\therefore$ $\hat{\text{ص}} = ٢,٥٦٤ \times ١٢٠ + ٣٥,٣٥ \simeq ٣٤٣$

$\because$ مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية – القيمة التى تحقق معادلة الانحدار |

$\therefore$ مقدار الخطأ = | ٣٥٦ – ٣٤٣ | = ١٣

نشاط

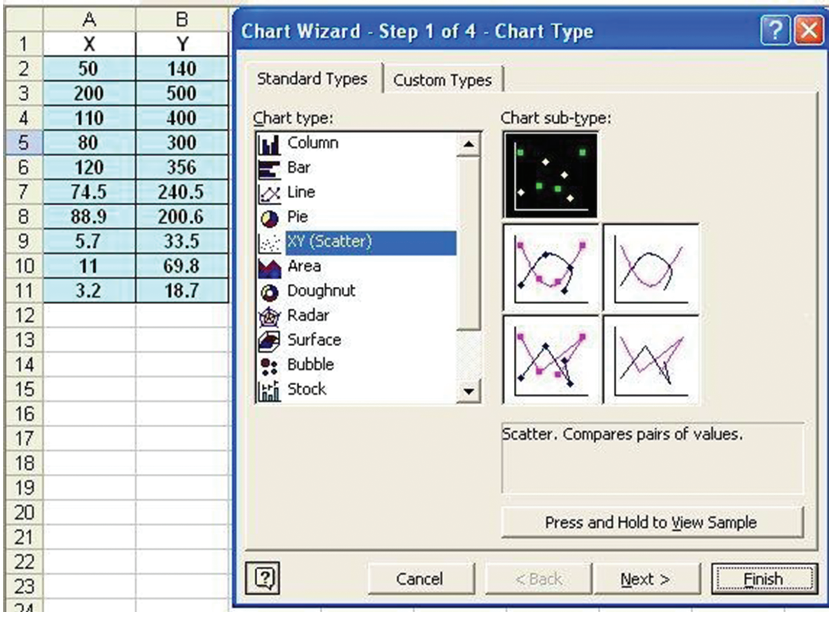
أولًا: تحقق من صحة حل المثال السابق باستخدام برنامج (Microsoft Excel)

ثانيًا: تحقق من صحة حل المثال السابق باستخدام برنامج الإحصاء (spss)

أولًا : استخدام برنامج *Microsoft Exceel*

١- افتح برنامج Microsoft Exceel وأدخل البيانات السابقة في خلايا العمودين (B) ، (A) تحت اسم (Y) ، (X) كمتغيرين حقيقيين أو الاسم الحقيقى لتلك البيانات كما هو موضح فى شكل (١) .

٢- من شريط الأدوات نضغط على Chart Wizard فنحصل على Chart Type ثم من القائمة XY Scatter نضغط على Finish. كما في شكل (٢).



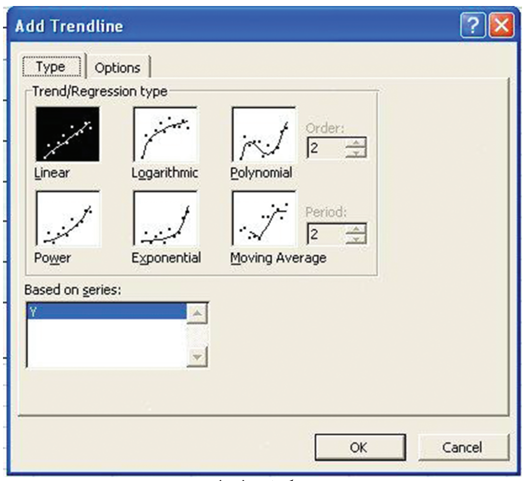
شكل (١)

شكل (٢)

٣- يبين شكل (٣) التمثيل البيانى للنقاط المدرجة فى الجدول والذى يسمى شكل الانتشار . نختار منها الشكل المظلل باللون الأسود . والذي يظهر هنا بعد إجراء تغير في الخلفية كما مبين بالشكل .

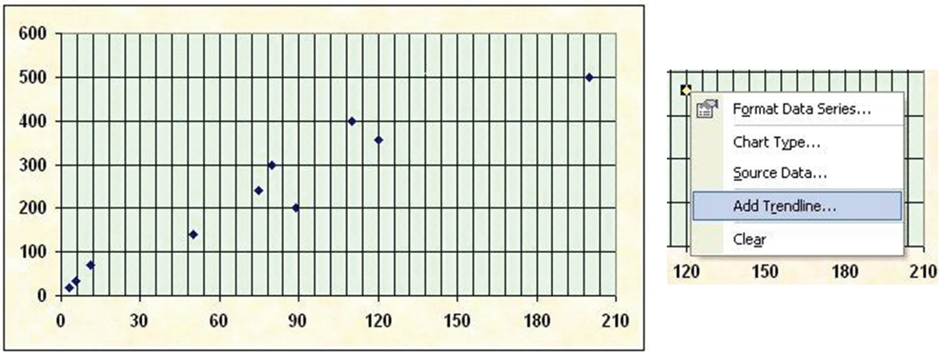
٤- القيم على المحور الأفقي تمثل قيم x للبيانات والمحور الرأسي للقيم y ونحن هنا بصدد إيجاد معادلة خط انحدار y علىx والتي تأخذ الصورة الآتية:

$$Y = a + bX.$$



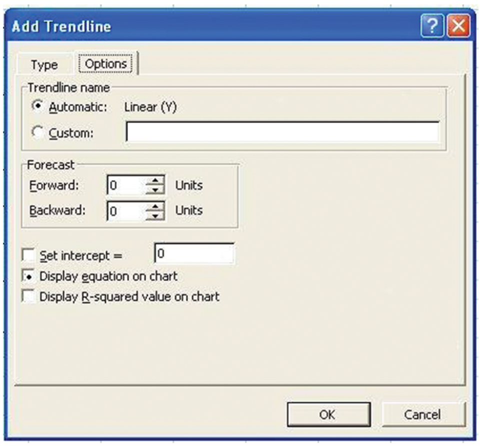
شكل (٣)

٥- بزر الفأرة الأيمن نضغط على إحدى النقاط (في الشكل (٤)) فتظهر القائمة المبينة بالشكل حيث نختار منها Add Trendline وبالنقر عليها بالفأرة نحصل على الشكل التالي الذي يظهر ستة أشكال من الانتشار، قمنا باختيار الأول منها كما مبين بالتظليل باللون الأسود كخيار مقبول؛ لكوننا نريد الخط المستقيم ومن ثم من Options لتحديد المطلوب وذلك بالنقر عليها بالفأرة حيث يظهر صندوق الحوار الآتي:



شكل (٤)

٦- نعلم على Display equation on chart كما هو مبين بالشكل (٥)



شكل (٥)

٧- نضغط على OK للحصول على المطلوب وهو:

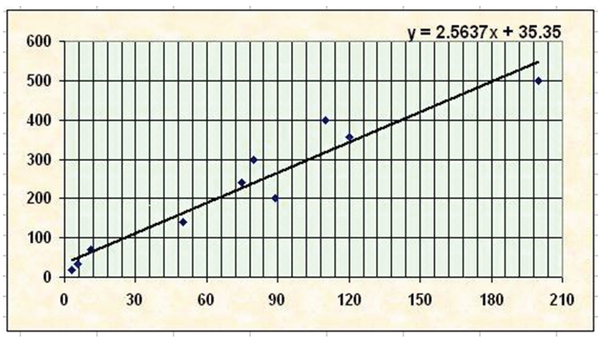
أ الشكل المبين فيه خط الانحدار متوسط النقاط الممثلة لأزواج البيانات.

ب معادلة خط الانحدار (في شكل (٦)) قد قمنا هنا بنقل المعادلة من مكانها في الشكل لأعلى مع تغير الخط لتوضيح الأمر

والشكل التالي هو نتاج العملية والذي يبين لنا المطلوب وخاصة المعادلة الآتية:

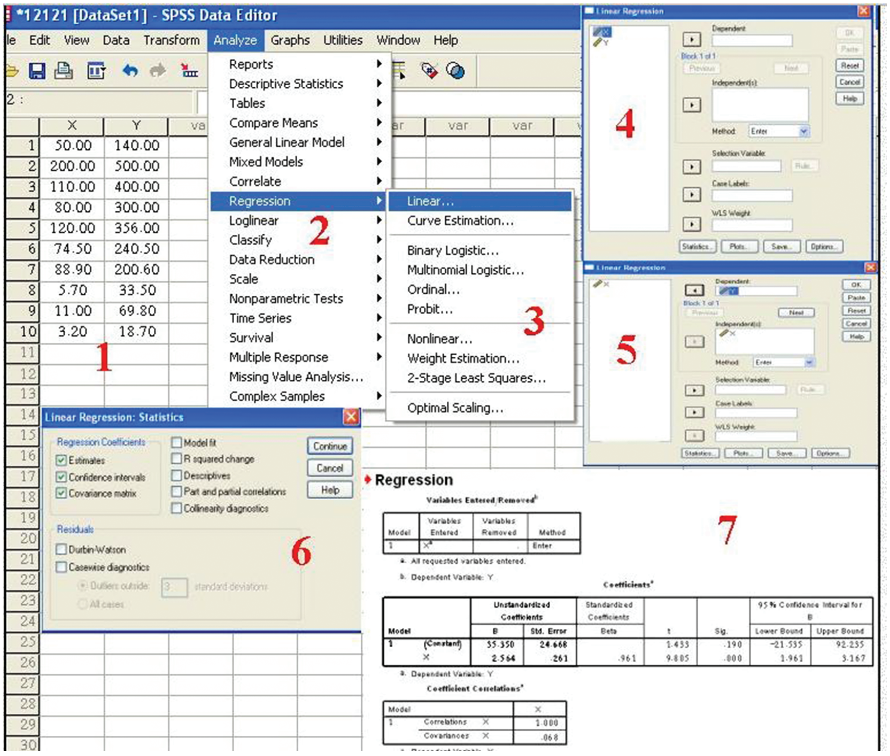
$35.35 + 2.5637x = y$

وهي معادلة خط الانحدار وهى نفس المعادلة التي وجدناها في الحل السابق.



شكل (٦)

استخدام برنامج SPSS



شكل (٧)

مثال

② الربط بالتعدين يبين الجدول التالى بيانات عن متوسط سعر برميل البترول ومعدلات النمو الاقتصادي في إحدى الدول خلال ثماني سنوات والمطلوب إيجاد:

سعر برميل البترول (س)	٣٦	٤٠	٣٦,٢	٣١,١	٢٩,٧	١٦,٣	١٨,٧	١٤,٦
معدل النمو الاقتصادى (ص)	٠,٩١	٣,٥	٣,٢	٢,٧	٢,٣	١-	٠,٩-	١,٦-

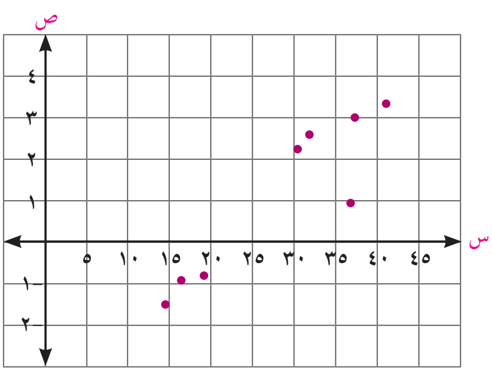
أولًا : ارسم شكل الانتشار وبين منه نوع الارتباط .

ثانيًا : أوجد معادلة خط الانحدار للبيانات المعطاة .

ثالثًا : تنبأ بالنمو الاقتصادى عندما يكون سعر البرميل ١٥ دولارًا، ثم عندما يصبح سعره ٣٥ دولارًا .

الحل

أولًا: الشكل المقابل يمثل شكل الانتشار وهو يبين أن الارتباط طردى .



س	ص	س٢	ص٢	س ص
٣٦	٠,٩١	١٢٩٦	٠,٨٢٨١	٣٢,٧٦
٤٠	٣,٥	١٦٠٠	١٢,٢٥	١٤٠
٣٦,٢	٣,٢	١٣١٠,٤٤	١٠,٢٤	١١٥,٨٤
٣١,١	٢,٧	٩٦٧,٢١	٧,٢٩	٨٣,٩٧
٢٩,٧	٢,٣	٨٨٢,٠٩	٥,٢٩	٦٨,٣١
١٦,٣	−١	٢٦٥,٦٩	١	−١٦,٣
١٨,٧	−٠,٩	٣٤٩,٦٩	٠,٨١	−١٦,٨٣
١٤,٦	−١,٦	٢١٣,١٦	٢,٥٦	−٢٣,٣٦
٢٢٢,٦	٩,١١	٦٨٨٤,٢٨	٤٠,٢٦٨١	٣٨٤,٣٩

من بيانات الجدول:

مجـ ص = ٩,١١   مجـ س = ٢٢٢,٦

مجـ س ص = ٣٨٤,٣٩   مجـ س٢ = ٦٨٨٤,٢٨

ثانيًا : نحسب قيمة الثابت ب من العلاقة :

$$ب = \frac{ن \text{ مجـ} س ص - \text{مجـ} س \text{ مجـ} ص}{ن \text{ مجـ} س^2 - (\text{مجـ} س)^2}$$

$$= \frac{٨ \times ٣٨٤,٣٩ - (٢٢٢,٦ \times ٩,١١)}{٨ \times ٦٨٨٤,٢٨ - (٢٢٢,٦)^2} \simeq ٠,١٨٩٦$$

$$\because أ = \frac{\text{مجـ} ص - ب \text{ مجـ} س}{ن} \qquad \therefore أ = \frac{٩,١١ - (٠,١٨٩٦ \times ٢٢٢,٦)}{٨} \simeq -٤,١٣٦٨$$

∵ معادلة خط الانحدار هى : $\hat{ص} = أ + ب\, س$

∴ $\hat{ص} = ٠,١٨٩٦\, س - ٤,١٣٦٨$

ثالثًا :

عندما س = ١٥   تكون : $\hat{ص} = ٠,١٨٩٦ \times ١٥ - ٤,١٣٦٨ \simeq -١,٢٩٢٨$

عندما س = ٣٥   تكون : $\hat{ص} = ٠,١٨٩٦ \times ٣٥ - ٤,١٣٦٨ \simeq ٢,٤٩٩٢$

حاول أن تحل

١ فى دراسة العلاقة بين الدخل (س) والاستهلاك (ص) بآلاف الجنيهات كانت النتائج الآتية:

مجـ س = ١٢٠ ، مجـ ص = ١٠٠ ، مجـ س ص = ٥١٦

مجـ س٢ = ٧٢٠ ، مجـ ص٢ = ٤١٠ ، ن = ٤٠

أ أوجد معامل الارتباط الخطى بين س، ص بطريقة بيرسون وحدد نوعه.

ب معادلة خط الانحدار.

جـ تنبأ بقيمة الاستهلاك (ص) عندما يصل الدخل ١٠٠٠٠ جنيه.

تمـــارين (١ - ٢)

أولًا : أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات التالية:

١) المعادلة الإحصائية لمعادلة خط الانحدار حيث ب معامل الانحدار هى:

أ) $\hat{ص}$ = أ س + ب　　ب) $\hat{ص}$ = أ + ب س

جـ) $\hat{ص}$ = أ ص + ب　　د) $\hat{ص}$ = أ + ب ص .

٢) إذا كانت معادلة خط الانحدار هى : $\hat{ص}$ = ٢ + ٠,٥ س فإن قيمة ص المتوقعة عندما س = ٦ هى :

أ) ٤　　ب) ٥　　جـ) ٧　　د) ٨

٣) إذا وقعت النقطتان (١١,٥ ، ١٠) ، (٦,٥ ، ٥) على خط انحدار ص على س فإن الارتباط بين س ، ص يكون :

أ) طرديًّا　　ب) عكسيًّا　　جـ) تامًّا　　د) منعدمًا

٤) إذا وقعت النقطتان (٥ ، ١٣) ، (١٤ ، ٤) على خط انحدار ص على س فإن جميع النقاط التالية تقع على نفس الخط ما عدا النقطة :

أ) (١٥ ، ٥)　　ب) (١٠ ، ٨)　　جـ) (٦ ، ١٢)　　د) (٥ ، ١٣)

٥) إذا كانت جميع النقاط في شكل الانتشار تقع على خط مستقيم ميله سالب فإن معامل الارتباط بين س، ص يساوي:

أ) ١　　ب) صفر　　جـ) - ٠,٥　　د) -١

٦) إذا كانت جميع النقاط في شكل الانتشار تقع على خط مستقيم ميله موجب، فان معامل الارتباط بين المتغيرين يساوى :

أ) - ١　　ب) صفر　　جـ) $\frac{١}{٢}$　　د) ١

ثانيًا : أجب عن الأسئلة الآتية:

٧) الجدول الآتى يبين العلاقة بين متغيرين س ، ص :

س	٥	٨	١٠	١٤	١٦	٢٠
ص	٤	٦	٩	١١	١٢	١٥

أ) أرسم شكل الانتشار　　ب) أوجد معادلة خط الانحدار

جـ) تنبأ بقيمة ص عندما س = ١٢

٨) من بيانات الجدول الآتى:

س	٢٠	٣٣	٣٠	٤٠	١٣	١٥	٢٦	٢٥
ص	٧	٨	٩	١١	٤	٥	٨	٩

أ) تنبأ بقيمة ص عندما س = ٣٥

ب) أوجد مقدار الخطأ فى ص = إذا كانت س = ٣٠

٩ في دراسة إحصائية لإيجاد العلاقة بين متغيرين س ، ص حصلنا على البيانات التالية:

ن = ١٠ ، $\overline{\text{س}}$ = ٨ ، $\overline{\text{ص}}$ = ١٠ ، مجـ س ص = ٨٧٠ ، مجـ س^{٢} = ٦٦٥ ، مجـ ص^{٢} = ١٤٠٠ أوجد:

أ معامل الارتباط الخطى.

ب معادلة خط الانحدار.

١٠ إذا كان : مجـ س = ٣٠ ، مجـ ص = ٤٠ ، مجـ س ص = ١٦٢

مجـ س^{٢} = ٢١٠ ، مجـ ص^{٢} = ٣٠٤ ، ن = ٦ فأوجد :

أ معادلة خط الانحدار.

ب معامل الارتباط الخطى بين س ، ص محددا نوعه.

١١ الربط بالمبيعات: فى أحد أماكن بيع السيارات المستعملة كانت المبيعات على النحو التالى:

عمر السيارة (س)	٣	٢	١	١	٥	٦	١	٤
ثمن البيع (ص)	٥٤	٨٠	٧٤	٩٨	٤٥	٤٠	٨٥	٦٠

أ معامل الارتباط الخطى لبيرسون

ب معادلة خط الانحدار .

١٢ الربط بالاقتصاد: الجدول التالى يمثل الدخل الشهرى (س) والإنفاق (ص) لمجموعة من الأسر بمئات الجنيهات:

الدخل (س)	٣٨	٢٧	٣٩	٤٠	٥٦	٦٦	٤٢	٤٤
الإنفاق (ص)	١٩	٢٥	٢٠	٢٨	٣١	٣٨	٢٧	٢٢

أ أوجد معامل ارتباط الرتب بيرسون وحدد نوعه.

ب أوجد معادلة خط الانحدار .

جـ قدِّر قيمة الانفاق (ص) إذا كان الدخل (س) ٥٠٠٠ جنيه .

د أوجد مقدار الخطأ فى (ص) إذا كانت س = ٤٠ .

١٣ الربط بالأسرة : لدراسة العلاقة بين الدخل "ص" والاستهلاك "س" بمئات الجنيهات شهريًا فى إحدى المدن، أُخذت عينة مكونة من ٤٠ أسرة فأعطت النواتج الآتية:

مجـ س = ١٠٠ ، مجـ ص = ١٢٠ ، مجـ س ص = ٥١٦ ، مجـ س^{٢} = ٤١٠ ، مجـ ص^{٢} = ٧٢٠ .

أ أوجد معادلة خط الانحدار.

ب تنبأ بدخل الأسرة التى يبلغ استهلاكها ٧٠٠ جنيه شهريًا.

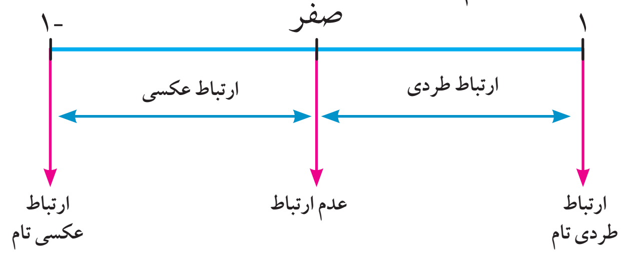
ملخص الوحدة

١ الارتباط طريقة إحصائية يمكن من خلالها تحديد درجة ونوع العلاقة بين متغيرين .

٢ شكل الانتشار هو تمثيل بيانى لعدد من الأزواج المرتبة (س ، ص) لوصف العلاقة بين متغيرين .

٣ يُعرف الارتباط الخطي البسيط بأنه الدرجة أو القيمة العددية للعلاقة بين متغيرين فقط

٤ معامل الارتباط: يرمز له بالرمز (ر) وهو عبارة عن مقياس كمى نسبى يقيس قوة الارتباط بين متغيرين حيث - ١ ≤ ر ≤ ١ ، ويقال إن الارتباط طردى تام إذا كان معامل الارتباط ر = ١ ، ويقال إن الارتباط عكسى تام إذا كان معامل الارتباط ر = - ١ ، وينعدم الارتباط عندما ر = ٠



٥ معامل الارتباط الخطى لبيرسون :

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\sqrt{\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}}\ \sqrt{\text{ن مجـ ص}^{٢} - (\text{مجـ ص})^{٢}}}$$

٦ معامل ارتباط الرتب لسبيرمان:

$$\text{ر} = ١ - \frac{٦\ \text{مجـ ف}^{٢}}{\text{ن}(\text{ن}^{٢} - ١)}$$

٧ الانحدار : أسلوب إحصائى يمكن بواسطته تقدير قيمة أحد المتغيرين بمعلومية قيمة المتغير الآخر.

٨ معادلة خط الانحدار : $\hat{\text{ص}} = \text{أ} + \text{ب س}$

حيث :

أ طول الجزء المقطوع من محور الصادات.

ب معامل انحدار ص على س وهى تعبر عن ميل خط الانحدار على الاتجاه الموجب لمحور السينات.

$$\text{ب} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}} \quad ، \quad \text{أ} = \frac{\text{مجـ ص} - \text{ب مجـ س}}{\text{ن}}$$

٩ تستخدم معادلة خط الانحدار فى :

التنبؤ بقيمة ص إذا عُلمت قيمة س .

تحديد مقدار الخطأ الذى يتحدد من العلاقة :

مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية – القيمة التى تحقق معادلة الانحدار |

تمـــارين عامة

أولًا : أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات التالية:

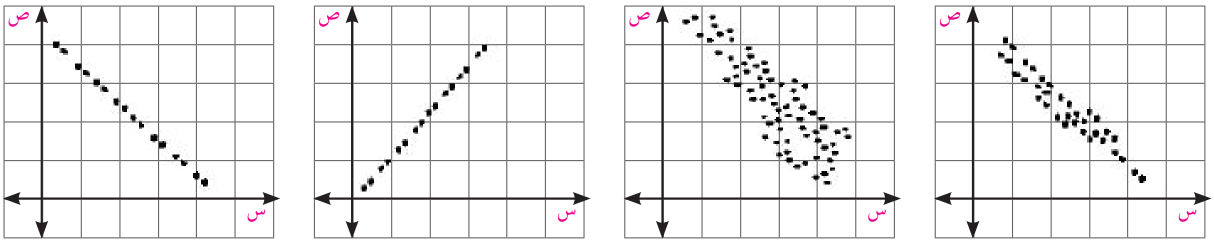
① أقوى معامل ارتباط عكسى فيما يلى هو:

أ – ٠,٩ ‌‌ ‌ ب – ٠,٥ ‌ ‌ ج – ٠,١ ‌ ‌ د صفر

② أقل معامل ارتباط فيما يلى هو:

أ - ١,١ ‌ ‌ ب - ٠,٩ ‌ ‌ ج ٠,١٢ ‌ ‌ د ١,٠٢

③ الشكل الذى يدل على ارتباط عكسى قوى بين س ، ص هو شكل:



أ ‌ ‌ ب ‌ ‌ ج ‌ ‌ د

④ إذا كانت معادلة خط الانحدار هى : $\hat{ص}$ = ٣ - س فإن نوع الارتباط بين المتغيرين س ، ص يكون:

أ طرديًا تامًا ‌ ‌ ب لا يوجد ارتباط ‌ ‌ ج منعدمًا ‌ ‌ د عكسيًا تامًّا

⑤ إذا كانت معادلة خط الانحدار هى: $\hat{ص}$ = ٧ – ٠,٨ س فإن قيمة ص المتوقعة عندما س = ٥ هى :

أ ٢ ‌ ‌ ب ٣ ‌ ‌ ج ٥ ‌ ‌ د ٧

⑥ إذا وقعت النقطتان (٢ ، ٨) ، (٧ ، ٣) على خط انحدار ص على س وكان الارتباط تامًّا ، فإن معامل الارتباط الخطى يساوى :

أ - ١ ‌ ‌ ب صفر ‌ ‌ ج $\frac{١}{٢}$ ‌ ‌ د ١

ثانيًا : أجب عن الأسئلة الآتية:

⑦ إذا كان :

$\sum$ س = ٥٠ ‌ ‌ $\sum$ ص = ٤٠ ‌ ‌ ن = ١٠

$\sum$ س ص = ٢١٣ ‌ ‌ $\sum$ س^{٢} = ٢٩٨ ‌ ‌ $\sum$ ص^{٢} = ١٧٦

أوجد قيمة معامل الارتباط لبيرسون بين المتغيرين س وحدد نوعه ودرجته

⑧ من بيانات الجدول الآتى:

س	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
ص	١٢	٧	١٢	٣	١٤	١٥	٢١

احسب معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين س ، ص وحدد نوعه.

٩ من بيانات الجدول الآتى:

س	٣٢	٤٢	٤٠	٣٥	٣١	٤٦	٥٠	٣٣
ص	٢٥	٣٤	٣٥	٣٠	١٧	٢٨	٤٢	١٩

احسب معامل الارتباط الرتب لسبيرمان بين قيم س ، ص وحدد نوعه.

١٠ من بيانات الجدول الآتى:

س	ممتاز	جيد	جيد جدًّا	مقبول	ضعيف	جيد
ص	جيد	ضعيف	مقبول	ممتاز	جيد جدًّا	مقبول

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س ، ص

١١ الربط بالتجارة : الجدول الآتى يمثل حجم المبيعات س والربح الناتج ص لمجموعة مكونة من ٦ شركات، والمطلوب حساب معامل ارتباط بيرسون بين حجم المبيعات والربح.

حجم المبيعات س	٥٠٠	٦٠٠	٤٠٠	٤٨٠	٥٥٠	١٠٠
الربح ص	٣٠٠	٤٠٠	٢٥٠	٢٠٠	٤٠٠	٩٠

١٢ من بيانات الجدول الآتى:

س	١٠	١٢	١٥	١٢	١٤	٨
ص	٦	٨	٦	٦	٩	٥

أ أوجد معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين المتغيرين س ، ص وحدد نوعه .

ب أوجد معادلة خط الانحدار ثم تنبأ بقيمة $\hat{ص}$ عندما س = ٧ .

١٣ الربط بالتجارة :

لدراسة العلاقة بين الكمية (ص) من سلعة ما والسعر (س) بالجنيه كانت لدينا البيانات الآتية:

$\sum$ س = ٤٩ ، $\sum$ ص = ٧٧ ، $\sum$ س ص = ٦٠٩ ، $\sum$ س^٢ = ٣٧١ ، $\sum$ ص^٢ = ١٠٤٩ ، ن = ٧ أوجد :

أ معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين الكمية المطلوبة والسعر.

ب تقدير الكمية ($\hat{ص}$) عندما يكون السعر ٢١ جنيهًا.

١٤ الربط بالرياضة : الجدول الآتى يعبر عن عُمر أحد الأشخاص وعدد ساعات التمارين التى يمارسها:

العُمر	٢٠	٢٥	٣٣	٣٧	٥٠	٥٨
عدد ساعات التمارين	١٠	٦	٣	٢	١,٥	١

أ أوجد معادلة خط الانحدار.

ب تنبأ بعدد ساعات التمارين عندما يكون عُمر الشخص ٤٠ سنة .

ج احسب مقدار الخطأ عندما يكون عُمر الشخص ٣٣ سنة .

لمزيد من الأنشطة والتدريبات زيارة الموقع الالكترونى www.sec3mathematics.com.eg

اختبار تراكمى

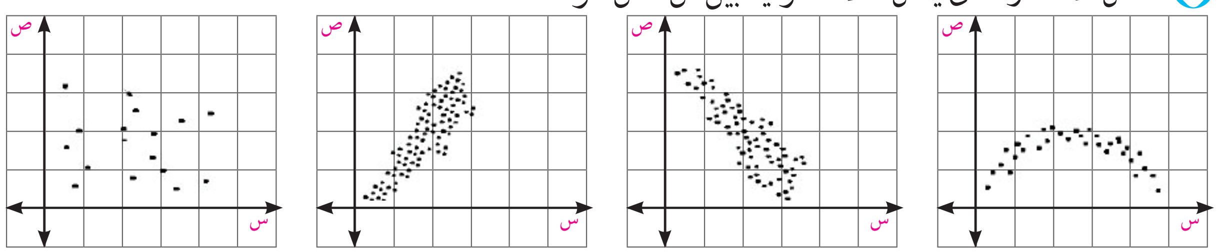
أسئلة ذات اجابات قصيرة:

أولًا : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الآتية (من ١ الى ١٠):

(١) مجموع القيم التى وسطها الحسابى ٨ وعددها ٧ تساوى:

أ ٤٠ ب ٥٦ جـ ٦٠ د ٨٠

(٢) شكل الانتشار الذى يمثل علاقة طردية بين س ، ص هو:



أ ب جـ د

(٣) العلاقة بين طول ضلع المربع ومساحته هو ارتباط :

أ طردى قوى. ب عكسى قوى. جـ طردى تام. د عكسى تام.

(٤) إذا كان المتغيران يتزايدان معًا أو يتناقصان معًا فإن الارتباط بينهما يكون:

أ طرديًّا. ب عكسيًّا. جـ غير خطيًّا. د منعدمًا.

(٥) معامل الارتباط مقياس رقمى تتراوح قيمته بين :

أ [٠ ، ١] ب]-١ ، ١[جـ [-١ ، ١] د [-١ ، ١] – {٠})

(٦) يسمى المتغير المطلوب تقديره فى معادلة خط الانحدار بالمتغير:

أ المستقل. ب التابع. جـ الطردى. د العكسى.

ثانيًا : تفسير :

(٧) إشارة معامل الانحدار تدل على نوع الارتباط (طردى أو عكسى) فسر هذه العبارة .

أسئلة ذات إجابات طويلة:

(٨) من بيانات الجدول المقابل:

س	٦٥	٦٦	٦٧	٦٧	٦٨	٦٩
ص	٧٠	٧٢	٦٨	٦٤	٦٨	٦٧

أ أوجد معامل الارتباط الخطى بين المتغيرين س ، ص وحدد نوعه

ب تنبأ بقيمة $\hat{ص}$ عندما س = ٦٢

جـ احسب مقدار الخطأ فى ص إذا كانت س = ٦٦

(٩) الجدول الآتى يبين العلاقة بين عُمر السائق وعدد المخالفات التى حصل عليها خلال عام.

عُمر السائق (س)	٤٥	٢٨	٥٢	٢٤	٥٦	٣٢	٦٣	٣٨
عدد المخالفات (ص)	٤	٧	٢	٧	٢	٥	١	٣

أ أوجد معامل ارتباط الرتب بين س ، ص

ب أوجد معادلة خط انحدار ص على س .

جـ قدر $\hat{ص}$ إذا كانت س = ٤٠

د احسب مقدار الخطأ فى ص إذا كانت س = ٣٨

الوحدة

٢

الاحتمال الشرطى

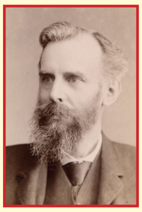
Conditional Probability

مقدمة الوحدة

سبق أن علمنا بأن علم الإحصاء هو أحد فروع مادة الرياضيات والذي يهتم بجمع البيانات وترتيبها وتفسيرها بهدف أتخاذ القرارات المناسبة لظاهرة ما، وتعتبر الاحتمالات الخلفية الرياضية للطرق الإحصائية، وقد استخدمها الباحثون منذ القدم لأسباب اجتماعية واقتصادية وصحية وغيرها، وقد تأسس علم الاحتمال بشكله الحالى على يد عدد كبير من العلماء نذكر منهم العالم الفرنسى (بيير سيمون لابلاس ١٧٤٩ - ١٨٢٧) ومن العلماء الإنجليز (ديمورجان ١٨٠٦ - ١٨٧١) ،(جون ڤن ١٨٣٤ - ١٩٢٣) والعالم الروسى (أندريه ماركوف ١٨٥٦ - ١٩٢٢) وغيرهم.


بيير سيمون لابلاس


ديمورجان


جون ڤن


أندريه ماركوف

ومن الجدير بالذكر أن تطبيقات الإحصاء والاحتمال كثيرة فى مختلف المجالات التربوية والاجتماعية والاقتصادية، وسوف نتناول فى هذه الوحدة دراسة الاحتمال الشرطى بين حدثين ونظرياته وتطبيقاته في مواقف حياتية مختلفة، كما سندرس الأحداث المستقلة وغير المستقلة .

أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف الأحداث المتنافية وغير المتنافية.
- يتعرف الاحتمال الشرطى.
- يستنتج نظريات على الاحتمال الشرطى.
- يتعرف الأحداث المستقلة وغير المستقلة.
- يطبق الاحتمال الشرطى في مواقف حياتية مختلفة.

المصطلحات الأساسية

- الأحداث المتنافية *Mutually Exculusive events*
- أحداث غير متنافية *Events are not mutually exclusive*
- الاحتمال الشرطى *Conditional probability*
- الأحداث المستقلة *Independent Events*
- الأحداث غير المستقلة *Dependent Events*

دروس الوحدة

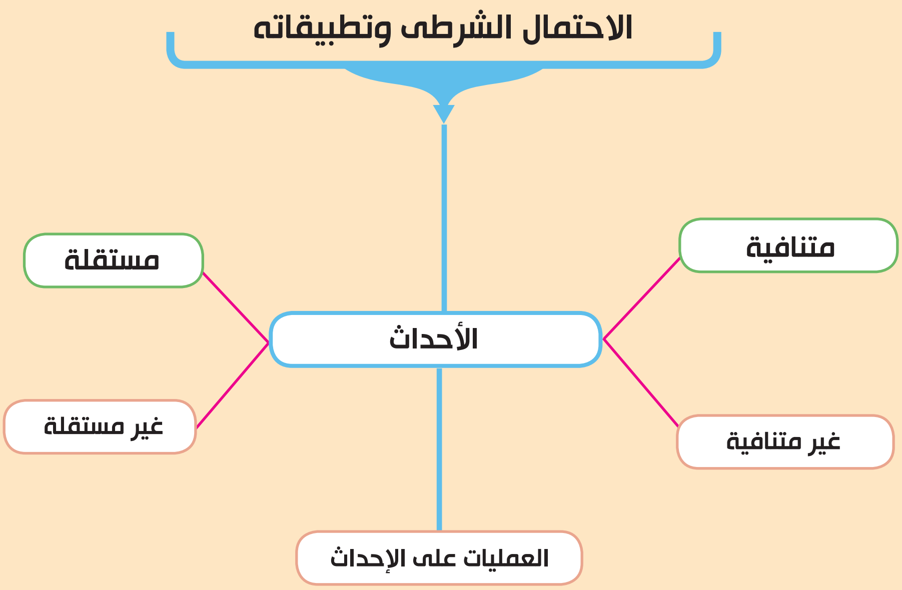
الدرس (٢ - ١): الاحتمال الشرطى.

الدرس (٢ - ٢): الأحداث المستقلة.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية

مخطط تنظيمى للوحدة



الوحدة الثانية

٢ - ١

الاحتمال الشرطى

Conditional Probability

سوف تتعلم

- الأحداث المتنافية.
- الأحداث غير المتنافية.
- الاحتمال الشرطى.

المصطلحات الأساسية

- الأحداث المتنافية *Mutually Exclusive Events*
- أحداث غير متنافية *Events are not Mutually Exclusive*
- الاحتمال الشرطى *Conditional probability*

مقدمة:

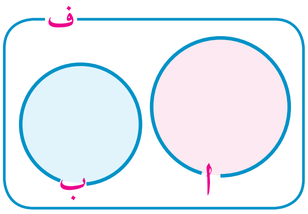
سبق أن درست حساب احتمال حدث ما (وليكن أ) لتجربة عشوائية، وذلك بمعرفة العلاقة بين عدد عناصر هذا الحدث ن(أ) وعدد عناصر فضاء التجربة العشوائية ن(ف) من خلال العلاقة:

$$\text{ل(أ) (احتمال وقوع الحدث أ)} = \frac{\text{عدد عناصر الحدث ن(أ)}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة ن(ف)}}$$

الأحداث المتنافية: *Mutually Exclusive Events*

علمت من خلال دراستك للاحتمال بأن الأحداث المتنافية هى الأحداث التى لا يمكن وقوعها فى آن واحد، لأن وقوع أحدها يمنع وقوع الأحداث الأخرى، الأمر الذى يعنى عدم وجود عناصر مشتركة للعناصر المكونة لها.

الحدثان المتنافيان:

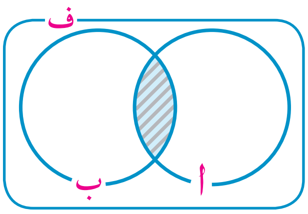


هما الحدثان اللذان لايشتركان فى أى عنصر وتقاطعهما هو المجموعة الخالية ϕ .

فإذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فإن: أ ∩ ب = ϕ

∴ ل (أ ∩ ب) =صفر ويكون ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

الحدثان غير المتنافيان: *Events are not Mutually Exclusive*



هما الحدثان اللذان لا يمنع وقوع أحدها وقوع الحدث الآخر (توجد عناصر مشتركة بينهما)

ويكون:

(١) ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب)

(٢) ل (أ′) =١ - ل (أ)

(٣) ل (أ - ب) = ل (أ) - ل (أ ∩ ب)

(٤) ل (أ ∩ ب′) = ل (أ - ب) = ل (أ) - ل (أ ∩ ب)

(٥) ل (أ′ ∩ ب) = ل (ب - أ) = ل (ب) - ل (أ ∩ ب)

الأدوات المستخدمة آلة حاسبة علمية. برامج رسومية للحاسب.

الاحتمال الشرطي *Conditional Probability*

إذا كان أ ، ب حدثين من ف فإنه في بعض الأحيان تتوافر معلومات بأن حدثًا ما مثل ب قد وقع، ل (ب) في هذه الحالة قد يكون لوقوع الحدث ب تأثير على احتمال وقوع أ و يمكن حساب احتمال وقوع أ بشرط وقوع ب من خلال معرفة العلاقة بين نواتج الحدث أ ونواتج الحدث ب.

مثال تمهيدي: في تجربة إلقاء قطعة نرد منتظمة مرة واحدة فإن فضاء العينة ف هو:

ف = {١ ، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} ، فإذا كان الحدث أ = {١ ، ٢، ٣} هو حدث ظهور عدد أقل من ٤

فمن الواضح أن: ل(أ) = $\frac{ن(أ)}{ن(ف)}$ = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

و إذا كان الحدث ب = {٢، ٤، ٦} هو حدث ظهور عدد زوجي.

لنتساءل الآن: إذا علمنا أن الحدث ب قد وقع بالفعل فما احتمال وقوع الحدث أ ؟

بمعنى آخر، ما احتمال الحصول على رقم زوجي أقل من ٤؟

نلاحظ أن الشرط المعطى يختزل فضاء العينة إلى المجموعة ب = {٢، ٤، ٦}

و يكون الحدث الموافق لظهور رقم زوجي هو أ ∩ ب = {٢}

وبالتالي فإن الاحتمال المطلوب هو: $\frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)}$ = $\frac{١}{٦}$ ÷ $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٣}$

إن هذا المثال يوضح لنا كيف أن بعض الأحداث تختلف احتمالاتها تبعًا لاختلاف فضاء العينة.

تعلم

الاحتمال الشرطي *Conditional Probability*

إذا كانت ف فضاء العينة لتجربة عشوائية ما وكان أ ، ب حدثين من هذا الفضاء.

فإن احتمال وقوع الحدث أ بشرط وقوع الحدث ب و يرمز له بالرمز ل (أ | ب) و يقرأ احتمال وقوع الحدث أ بشرط وقوع الحدث ب يتحدد بالعلاقة التالية:

$$ل(أ | ب) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)} \quad \text{حيث } ل(ب) > ٠$$

لاحظ أن: الاحتمال الشرطي يتمتع بنفس خواص الاحتمال (غير الشرطي) أي إن:

١- ٠ ≤ ل (أ | ب) ≤ ١

٢- ل (ف | ب) = $\frac{ل(ف \cap ب)}{ل(ب)}$ = $\frac{ل(ب)}{ل(ب)}$ = ١

٣- إذا كان $أ_١ \cap أ_٢ = \phi$ فإن ل [($أ_١ \cup أ_٢$) | ب] = ل ($أ_١$ | ب) + ل($أ_٢$ | ب)

مع ملاحظة أن:

- ل (أ | ب) ≠ ل (ب | أ)
- ل ($\acute{أ}$ | ب) = ١ - ل (أ | ب)
- ل (أ ∩ ب) = ل (أ|ب) × ل (ب) بشرط ل (ب) > ٠
- ل (أ ∩ ب) = ل ((ب | أ) × ل (أ) بشرط ل (أ) > ٠

مثال

الاحتمال الشرطي

١ أُلقي حجر نرد منتظم مرة واحدة، احسب احتمال ظهور العدد ٢ علمًا بأن العدد الظاهر زوجي؟

الحل

بفرض أن: فضاء العينة ف = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}، أ = { ٢ }، ب = { ٢ ، ٤، ٦}

فإن: ل(ب) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ ∩ ب) = ل (أ) = $\frac{١}{٦}$

∵ ل (أ | ب) = $\frac{\text{ل(أ ∩ ب)}}{\text{ل(ب)}}$

∴ ل (أ | ب) = $\frac{١}{٦}$ ÷ $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٦}$ × ٢ = $\frac{١}{٣}$

احتمال ظهور العدد ٢ علمًا بأن العدد الظاهر زوجيًّا هو $\frac{١}{٣}$

لاحظ أن

فى الاحتمال الشرطى لاحظ أن الحدث الذى يلى كلمات " ما احتمال" هو الحدث الذى نبدأ به، والحدث الذى يلى إحدى الكلمات " علمًا بأن أ، إذا كان أ ، إذا علم أ، ...) هو الشرط.

حاول أن تحل

١ أُلقي حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين ، ما احتمال ألّا يزيد عدد النقاط فى الرمية الأولى عن ٤ إذا علمت أن الفرق المطلق بين العددين الظاهرين يساوى ٢؟

مثال

إجراء العمليات

٢ إذا كان أ ، ب حدثين من الفضاء ف بحيث ل(أ) = ٠,٤٥ ، ل (ب) = ٠,٦ ، ل (ب | أ) = ٠,٨ ، أوجد:

أ ل (أ ∩ ب)   ب ل (أ ∪ ب)   جـ ل (أ | ب)   د ل (بَ | أ)

الحل

أ ∵ ل (ب | أ) = $\frac{\text{ل (ب ∩ أ)}}{\text{ل (أ)}}$

∴ ٠,٨ = $\frac{\text{ل(أ ∩ ب)}}{٠,٤٥}$ ∴ ل (أ ∩ ب) = ٠,٨ × ٠,٤٥ = ٠,٣٦

ب ∵ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∪ ب) = ٠,٤٥ + ٠,٦ - ٠,٣٦ = ٠,٦٩

جـ ل(أ | ب) = $\frac{\text{ل(أ ∩ ب)}}{\text{ل (ب)}}$ = $\frac{٠,٣٦}{٠,٦}$ = ٠,٦

لاحظ أن: ل(أ | ب) ≠ ل(ب | أ)

د ل(بَ | أ) = $\frac{\text{ل(بَ ∩ أ)}}{\text{ل(أ)}}$ = $\frac{\text{ل(أ - ب)}}{\text{ل(أ)}}$

= $\frac{\text{ل (أ) - ل(أ ∩ ب)}}{\text{ل(أ)}}$

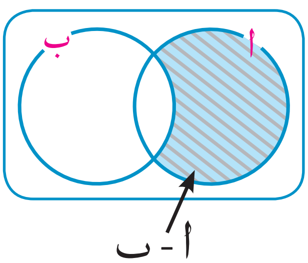
= $\frac{٠,٤٥ - ٠,٣٦}{٠,٤٥}$ = ٠,٢

تذكر أن

ل(ب ∩ أ) = ل(أ ∩ ب)

ل(أ ∪ ب) = ل (أ) + ل(ب) − ل (أ ∩ ب)

ل (أ − ب) = ل(أ) − ل (أ ∩ ب)



حاول أن تحل

(٢) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف بحيث ل(أ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٢٥ ، ل(أ - ب) = ٠,٤٥ أوجد:

أ ل(أ | ب)

ب ل(ب | أ)

جـ ل(أَ | ب)

د ل(أَ | بَ)

مثال

الجداول التوافقية

(٣) من بيانات الجدول التالي:

الحالة	عدد الأشخاص	
	يلبس نظارة	لا يلبس نظارة
رجل	٨٠٠	٦٠٠
امرأة	٤٠٠	٢٠٠

أوجد احتمال أن تكون امرأة اختيرت عشوائيًّا تلبس نظارة ؟

الحل

نفرض أن: ن(ف) = عدد الأشخاص موضوع الدراسة = ٢٠٠٠ ،

أ حدث أن الشخص المختار إمرأة

، ب حدث أن الشخص المختار يلبس نظارة

$$ل(أ \cap ب) = \frac{٤٠٠}{٢٠٠٠} = \frac{١}{٥}$$

$$ل(ب) = \frac{١٢٠٠}{٢٠٠٠} = \frac{٣}{٥}$$

المطلوب هو: إيجاد احتمال أ علمًا بأن ب قد وقع أى: ل(أ | ب)

$$\because ل(أ | ب) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)}$$

$$\therefore ل(أ | ب) = \frac{١}{٥} \div \frac{٣}{٥} = \frac{١}{٣}$$

احتمال أن تكون امرأة اختيرت عشوائيًّا تلبس نظارة هو $\frac{١}{٣}$

حاول أن تحل

(٣) فى المثال السابق أوجد:

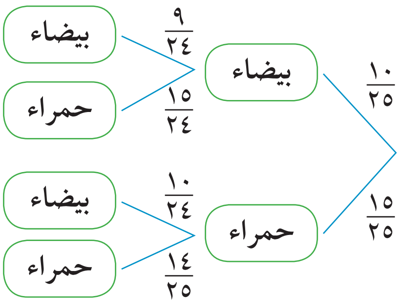
أ أن يكون رجل اختير عشوائيًّا لا يلبس نظارة .

ب أن يكون رجل أو امرأة اختير عشوائيًّا يلبس نظارة .

مثال — الشجرة البيانية

٤ حقيبة بها ١٠ كرات بيضاء ، ١٥ كرة حمراء سحبت عشوائيًّا كرتان على التوالى دون إحلال (إرجاع) . ما احتمال أن تكون الكرتان بيضاوين؟

الحل



نلاحظ فى هذا المثال أن سحب الكرات تم على التوالى ، لذلك فهو يخضع للترتيب، أى إن السحبة الثانية للكرة مشروط بحدوث السحبة الأولى. يمكن تمثيل هذا المثال بمخطط الشجرة البيانية كما هو موضح بالشكل الجانبى.

نفرض أن: أ ترمز لـ حدث أن تكون الكرة الأولى بيضاء

ب ترمز لـ حدث أن تكون الكرة الثانية بيضاء

(ب | أ) ترمز للحدث سحب الكرة الثانية بشرط أن تكون الكرة الأولى قد تم سحبها .

(أ ∩ ب) ترمز للحدث سحب كرتين بيضاوين.

$\because \text{ل}(\text{ب} \mid \text{أ}) = \dfrac{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ل}(\text{أ})}$

$\therefore \dfrac{٩}{٢٤} = \dfrac{(\text{أ} \cap \text{ب})}{\frac{١٠}{٢٥}}$

$\therefore \text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \dfrac{٩}{٢٤} \times \dfrac{١٠}{٢٥} = \dfrac{٣}{٢٠}$

احتمال أن تكون الكرتان بيضاوين هو $\frac{٣}{٢٠}$

حاول أن تحل

٤ فى المثال السابق أوجد احتمال أن تكون الكرتان حمراوين؟

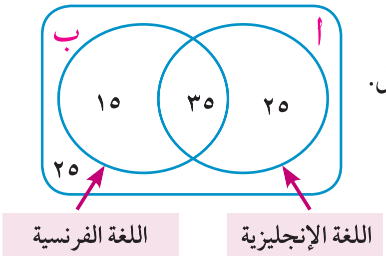
مثال — الربط بالتعليم

٥ يدرس ١٠٠ طالب فى أحد المعاهد التعليمية لتدريس اللغات، فإذا كان عدد الدارسين للغة الإنجليزية ٦٠ طالبًا وعدد الدارسين للغة الفرنسية ٥٠ طالبًا وعدد الدارسين للغتين معًا ٣٥ طالبًا. اختير أحد الطلاب من هذا المعهد عشوائيًّا ، أوجد احتمال أن يكون الطالب دارسًا:

أ أحد اللغتين على الأقل.

ب اللغة الإنجليزية إذا كان دارسًا اللغة الفرنسية.

جـ اللغة الفرنسية إذا كان دارسًا اللغة الإنجليزية.



الحل

يمكن توضيح بيانات المسألة على شكل ڤن كما هو مبين فى الشكل المقابل.

وبفرض الأحداث الآتية:

الطالب يدرس اللغة الإنجليزية = أ

الطالب يدرس اللغة الفرنسية = ب فإن:

ل(أ) = $\frac{\text{٦٠}}{\text{١٠٠}}$ = ٠,٦ ، ل(ب) = $\frac{\text{٥٠}}{\text{١٠٠}}$ = ٠,٥ ، ل(أ ∩ ب) = $\frac{\text{٣٥}}{\text{١٠٠}}$ = ٠,٣٥

أ احتمال أن يكون الطالب دارسًا أحد اللغتين على الأقل هو ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∪ ب) = ٠,٦ + ٠,٥ − ٠,٣٥ = ٠,٧٥

أى إن احتمال أن يكون الطالب دارسًا احد اللغتين على الأقل هو ٠,٧٥

ب احتمال أن يكون الطالب دارسًا اللغة الإنجليزية إذا كان دارسًا اللغة الفرنسية = ل(أ | ب)

∵ ل(أ | ب) = $\frac{\text{ل(أ ∩ ب)}}{\text{ل(ب)}}$

∴ ل(أ | ب) = $\frac{\text{٠,٣٥}}{\text{٠,٥}}$ = ٠,٧

أى إن احتمال أن يكون الطالب دارسًا اللغة الإنجليزية إذا كان دارسًا اللغة الفرنسية هو ٠,٧

جـ احتمال أن يكون الطالب دارسًا اللغة الفرنسية إذا كان دارسًا اللغة الإنجليزية = ل(ب | أ)

∵ ل(ب | أ) = $\frac{\text{ل(ب ∩ أ)}}{\text{ل(أ)}}$

∴ ل(ب | أ) = $\frac{\text{٠,٣٥}}{\text{٠,٦}}$ ≃ ٠,٥٨٣

أى إن احتمال أن يكون الطالب دارسًا اللغة الفرنسية إذا كان دارسًا اللغة الإنجليزية هو تقريبًا ٠,٥٨٣

حاول أن تحل

٥ يصوب لاعبان أ ، ب فى وقت واحد نحو هدف ما، فإذا كان احتمال أن يصيب اللاعب أ الهدف = $\frac{\text{٢}}{\text{٥}}$، واحتمال أن يصيب اللاعب ب الهدف = $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$، واحتمال أن يصيب اللاعبان أ ، ب معًا الهدف = $\frac{\text{١}}{\text{٦}}$، أوجد احتمال:

أ إصابة الهدف

ب إصابة الهدف من اللاعب أ إذا تم إصابته من اللاعب ب .

جـ إصابة الهدف من اللاعب ب إذا تم إصابته من اللاعب أ .

تمـــارين (٢ - ١)

أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) فى تجربة إلقاء قطعة نقود منتظمة مرتين متتاليتين، احتمال ظهور كتابة فى الرمية الثانية إذا ظهرت صورة فى الرمية الأولى تساوى:

أ $\frac{١}{٤}$ ب $\frac{١}{٢}$ ج $\frac{٣}{٤}$ د ١

٢) فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة ، احتمال ظهور عدد زوجى أولى إذا ظهر عدد أكبر من ١ هو:

أ $\frac{١}{٥}$ ب $\frac{٢}{٥}$ ج $\frac{٣}{٥}$ د $\frac{٤}{٥}$

٣) فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة ، احتمال ظهور العدد ٣ علمًا بأن العدد الظاهر فردى هو:

أ $\frac{١}{٤}$ ب $\frac{١}{٣}$ ج $\frac{١}{٢}$ د $\frac{٣}{٤}$

٤) إذا كان ل(أ ∩ ب) = $\frac{٢}{٥}$ ، ل(أ) = $\frac{٤}{٥}$ فإن ل(ب | أ) =

أ $\frac{١}{٢}$ ب $\frac{٨}{٢٥}$ ج $\frac{١}{٤}$ د $\frac{٢}{٥}$

٥) إذا كان ل(أ | ب) = $\frac{١}{٣}$ ، ل(ب) = $\frac{١٢}{٢٥}$ فإن ل(أ ∩ ب) =

أ $\frac{٤}{٢٥}$ ب $\frac{١}{٤}$ ج $\frac{٢٥}{٣٦}$ د $\frac{١٦}{٢٥}$

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

٦) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف بحيث كان ل(أ) = ٠,٤ ، ل(ب) = ٠,٧ ، ل(أ | ب) = ٠,٣ أوجد:

أ ل(أ ∩ ب)   ب ل(أ ∪ ب)   ج ل(ب | أ)   د ل(أ | ب′)

٧) إذا كان ل(أ′) = ٠,٤ ، ل(ب) = ٠,٥ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٨ أوجد ل(أ | ب′)

٨) إذا كان ل(ب | أ) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل(ب | أ′) = $\frac{٤}{٧}$ ، ل(أ) = $\frac{٣}{٥}$ أوجد

أ ل(أ ∩ ب)   ب ل(أ ∪ ب)

٩) أُلقي حجر نرد مرة واحدة . احسب احتمال أن يكون العدد الظاهر عددًا أوليًّا بشرط أن يكون العدد الظاهر عددًا فرديًّا .

١٠) فى تجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين مرة واحدة أوجد احتمال أن يكون:

أ العدد الظاهر على الحجر الثانى يساوى ٤، علمًا بأن العدد الظاهر على الحجر الأول يساوى ٢ .

ب مجموع العددين الظاهرين زوجيًّا علمًا بأن العدد الظاهر على الحجر الأول يساوى ٦.

١١) إذا كان احتمال نجاح طالب فى امتحان هو ٠,٧ واحتمال سفره للخارج إذا نجح هو ٠,٦ فما احتمال نجاحه وسفره للخارج؟

(١٢) فصل دراسى به ٤٥ طالبًا منهم ٢٧ يدرسون اللغة الفرنسية ،١٥ يدرسون اللغة الألمانية ، ٩ يدرسون اللغتين معًا، اختير طالب من هذا الفصل عشوائيًّا ، احسب احتمال أن يدرس الطالب المختار:

أ) مادة واحدة على الأقل من المادتين.

ب) يكون دارسًا اللغة الفرنسية إذا كان دارسًا اللغة الألمانية.

جـ) يكون دارسًا اللغة الألمانية إذا كان دارسًا اللغة الفرنسية.

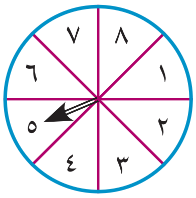
(١٣) أُلقِي حجرا نرد متمايزان مرة واحدة ، أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية:

أ) ظهور العدد ٢ على الوجهين معا علمًا بأن العدد نفسه ظهر على كل منهما.

ب) ظهور العدد ٥ على الوجهين علمًا بأن العددين الظاهرين كل منهما يزيد عن ٤ .

جـ) عدم ظهور العدد ٣ على أى من الوجهين علمًا بأن العددين الظاهرين فرديان.

(١٤) لعبة الدوارة: رُقِّمت قطاعات دائرية متساوية من ١ إلى ٨ فى لعبة الدوارة . ما احتمال أن يستقر المؤشر عند العدد ٥ إذا عُلم انه أستقر عند عدد فردى؟



(١٥) يبين الجدول التالى أعداد الفرق الرياضية المشاركة فى الألعاب الرياضية المختلفة:

اللعبة الرياضية	كرة اليد	كرة القدم	الكرة الطائرة	كرة السلة	كرة الهوكى
عدد الفرق المشاركة	٤	١٠	٦	٧	٣

إذا اختيرت إحدى هذه الألعاب عشوائيًّا فما احتمال أن تكون من ألعاب:

أ) كرة الهوكى علمًا بأنها ليست من ألعاب الكرة الطائرة .

ب) كرة السلة علمًا بأنها ليست من ألعاب كرة القدم وليست من ألعاب كرة اليد .

(١٦) اختيرت عينة عشوائية مكونة من ٣٠ طالبًا و٢٠ طالبة للمشاركة فى الإجابة عن الاقتصاد واستهلاك الطاقة فكانت إجاباتهم على النحو التالى:

الإجابة	نعم	لا	غير متأكد	المجموع
طلاب	٢٠	٦	٤	٣٠
طالبات	١٥	٣	٢	٢٠

فإذا اختير أحد أفراد العينة عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون الشخص المختار "طالبة" إجابتها نعم؟

(١٧) صندوق يحتوى على ٥ كرات بيضاء ، ٧ كرات سوداء. سُحبت كُرتان منه على التوالى دون إحلال (دون إرجاع) ، أوجد احتمال:

أ) أن تكون الكرة الثانية بيضاء إذا كانت الكرة الأولى بيضاء.

ب) أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية بيضاء.

جـ) أن تكون الكرة الثانية سوداء و الكرة الأولى بيضاء.

١٨ يتنافس كريم وزياد فى الترشح لرئاسة اتحاد طلاب المدرسة ضمن ثلاثة صفوف دراسية، والجدول التالى يمثل الأصوات التى حصل عليها كل منهم:

	الصف الأول	الصف الثانى	الصف الثالث	المجموع
كريم	١٩٦	١٧٤	١٣٠	٥٠٠
زياد	٢٤٠	١٦٥	١٣٥	٥٤٠

فإذا اختير طالب من طلاب المدرسة عشوائيًّا فما احتمال أن يكون الطالب:

أ انتخب المرشح "كريم" علمًا بأنه من طلاب الصف الثالث؟

ب انتخب المرشح "زياد" علمًا بأنه من طلاب الصف الثانى ؟

١٩ أُعلن عن وظيفة تقدم لها ١٠٠ شخص، رُتبت بياناتهم كالآتى:

	مؤهلون		غير مؤهلين	
	متزوج	أعزب	متزوج	أعزب
ذكر	٤٠	١٠	٣	١٢
أنثى	١٠	١٠	١٠	٥

أ احسب احتمال أن يكون الموظف المختار متزوجًا بشرط أن يكون مؤهلًا.

ب احسب احتمال أن يكون الموظف المختار متزوجًا ومؤهلًا.

جـ احسب احتمال أن يكون الموظف المختار متزوجًا بشرط أن يكون غير مؤهل.

٢٠ فى اختبار آخر العام وجد أن ٣٠٪ من الطلبة رسبوا فى الكيمياء، ٢٠٪ رسبوا فى الفيزياء ، ١٥ ٪ رسبوا فى الكيمياء والفيزياء. اختير أحد الطلبة عشوائيًّا.

أ إذا كان الطالب المختار راسبًا فى الكيمياء، فما احتمال رسوبه فى الفيزياء؟

ب إذا كان الطالب المختار راسبًا فى الفيزياء، فما احتمال رسوبه فى الكيمياء؟

جـ أوجد احتمال رسوبه فى الكيمياء بشرط عدم رسوبه فى الفيزياء؟

د أوجد احتمال نجاحه فى الفيزياء بشرط نجاحه فى الكيمياء؟

٢١ نشاط: استخدام شكل ڤن:

أ ، ب حدثان في فضاء العينة ف حيث ل(أ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٤ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٢

أ مَثِّل المجموعات السابقة بشكل ڤن واكتب على الرسم احتمالات وقوعها .

ب أوجد احتمالات الأحداث الآتية:

أولًا: وقوع الحدث أ بشرط عدم وقوع الحدث ب.

ثانيًا: وقوع الحدث ب بشرط عدم وقوع الحدث أ.

الوحدة الثانية

٢ - ٢

الأحداث المستقلة

Independent Events

سوف تتعلم

- الأحداث المستقلة.
- الأحداث غير المستقلة .

المصطلحات الأساسية

- الأحداث المستقلة Independent Events
- الأحداث غير المستقلة Dependent Events

فكر و ناقش

تأمل الأمثلة الآتية:

١- إلقاء قطعة نقود وحجر نرد مرة واحدة.

٢- نجاح طالب في مقرر الرياضيات ونجاحه في مقرر الكيمياء.

٣- سُحبت كرة عشوائيًّا من كيس به ١٠ كرات ثم أعيدت إلى الكيس، ثم سُحبت كرة ثانية.

٤- نجاح طالب في الامتحان العملي للفيزياء ونجاحه في مقرر الفيزياء.

٥- سَحْبُ كرة عشوائيًّا من كيس به ١٠ كرات دون إعادتها، ثم سحب كرة ثانية.

ماذا تلاحظ؟

نلاحظ من الأمثلة الثلاثة الأولى أن:

١- النواتج في قطعة النقود لا تؤثر في النواتج في حجر النرد .

٢- نجاح الطالب في الرياضيات أو رسوبه فيها لا يؤثر في نجاحه أو رسوبه في الكيمياء.

٣- إعادة الكرة الأولى إلى الكيس بعد سحبها لا يغير من عدد الكرات، وبالتالي فإن السحبة الأولى لا تؤثر في السحبة الثانية.

لذلك فإن الأحداث فى كل مثال من الأمثلة الثلاثة السابقة تُعرف بالأحداث المستقلة.

٤- نجاح الطالب فى الامتحان العملي للفيزياء يؤثر في نجاحه فى مقرر الفيزياء.

٥- عند سحب كرة من كيس دون إعادتها إليه يؤثر في عدد الكرات الموجودة فى الكيس، وبالتالى فإن السحبة الأولى تؤثر في السحبة الثانية.

لذلك فإن الأحداث فى المثالين (٤) ، (٥) تعرف بالأحداث غير المستقلة

تعلم الحدثان المستقلان

تعريف يقال إن الحدثين أ، ب مستقلان إذا وإذا فقط ل (أ ∩ ب) = ل (أ) × ل (ب).

أى إن احتمال وقوع حدثين مستقلين معًا يساوى احتمال وقوع الحدث الأول مضروبًا فى احتمال وقوع الحدث الثانى.

الأدوات المستخدمة آلة حاسبة علمية. برامج رسومية للحاسب.

ويُلاحظ أنه إذا كان الحدثان أ ، ب مستقلين وكان ل(ب) ≠ صفر

فإن ل(أ | ب) = ل (أ) أى إن وقوع أحد الحدثين لا يؤثر في احتمال وقوع الحدث الآخر.

فمثلًا: أُلقيت قطعة نقود منتظمة مرتين ولوحظ تتابُع حدوث الصورة والكتابة ،

فإن: ف = { (ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص) ، (ك، ك)}

لذا فإن احتمال أى من تلك النتائج = $\frac{١}{٤}$

بفرض أن الحدث أ يمثل ظهور الكتابة فى المرة الثانية = {(ص ، ك) ، (ك ، ك) }

والحدث ب يمثل ظهور الصورة فى المرة الأولى = {(ص ، ص) ، (ص ، ك)}

فإن ل (أ | ب) = $\frac{\text{ل(أ} \cap \text{ب)}}{\text{ل(ب)}}$ = $\frac{\frac{١}{٤}}{\frac{١}{٢}}$ = $\frac{١}{٢}$ = ل (أ)

أى إن حدوث الحدث ب لم يؤثر على احتمال حدوث الحدث أ بمعنى أن احتمال أ لا يعتمد على معلومية أن الحدث ب، قد وقع لذا نقول إن الحدثين أ ، ب مستقلان.

لاحظ أن: الحدثين المتنافيين أ ، ب يكونان مستقلين إذا و إذا فقط ل (أ) × ل (ب) = صفر بمعنى إذا و إذا فقط كان احتمال أ أو احتمال ب مساويًا صفر.

مثال

(١) في تجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة ثم إلقاء حجر نرد. ما احتمال ظهور صورة والعدد ٥؟

الحل

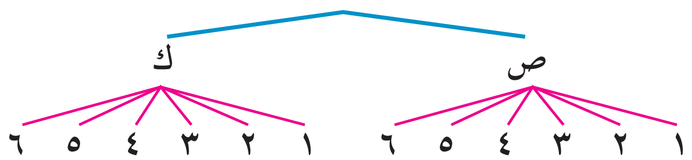
يمكن استخدام الشجرة البيانية لكتابة فضاء العينة: نلاحظ أن إلقاء قطعة النقود لا يؤثر في نواتج العينة لإلقاء حجر النرد ، لذلك فإن الحدثين مستقلان. وبفرض أن:

أ = حدث ظهور صورة. فإن ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ب = حدث ظهور العدد ٥. فإن ل(ب) = $\frac{١}{٦}$

∵ ل (أ ∩ ب) = ل (أ) × ل (ب) ∴ ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٦}$ = $\frac{١}{١٢}$

∴ احتمال ظهور صورة و العدد ٥ هو $\frac{١}{١٢}$

ملاحظة: يمكن إيجاد احتمال ظهور صورة والعدد ٥ مباشرة بكتابة فضاء العينة كما هو موضح بالشكل التالى:



ف = { (ص ، ١) ، (ص ، ٢) ، (ص، ٣) ، (ص ، ٤) ، (ص ، ٥) ، (ص ، ٦) ، (ك ، ١) ، (ك ، ٢) ، (ك ، ٣) ، (ك ، ٤)، (ك ، ٥) ، (ك ، ٦) }

حدث ظهور صورة والعدد ٥ = {(ص ، ٥)} ويكون احتمال ظهور صورة و العدد ٥ = $\frac{١}{١٢}$

حاول أن تحل

(١) فى المثال السابق أوجد احتمال ظهور كتابة وعدد أولى؟

مثال

(٢) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف وكان ل(أ) = ٠,٥ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٨.
بين مع ذكر السبب هل أ ، ب حدثان مستقلان؟

الحل

∵ ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل(ب) - ل (أ ∪ ب)

∴ ل (أ ∩ ب) = ٠,٥ + ٠,٦ − ٠,٨ = ٠,٣ (١)

∵ ل(أ)×ل(ب) = ٠,٥ × ٠,٦ = ٠,٣ (٢)

من (١) ، (٢) يكون أ ، ب حدثين مستقلين.

لاحظ أن: لإيضاح الفرق بين الحدثين المتنافيين والمستقلين نأخذ المثال التالي:

نعلم أنه عند إلقاء قطعة نقود معدنية منتظمة مرة واحدة فإن فضاء العينة ف = {ص، ك}

كما نعلم أن ل (ص) = $\frac{1}{2}$ ، ل (ك) = $\frac{1}{2}$

ونعلم أيضًا أن الحدثين ص ، ك حدثان متنافيان لأن حدوث أحدهما ينفي حدوث الآخر .

∴ ل (ص ∩ ك) = صفر ، ∴ ل (ص ∩ ك) ≠ ل(ص) × ل (ك)

أي أنه ص ، ك حدثان متنافيان إلا أنهما غير مستقلين.

حاول أن تحل

(٢) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف حيث ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}
وكان أ = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦} ، ب = {١ ، ٤ ، ٥ ، ٦} هل أ ، ب حدثان مستقلان؟ وضح ذلك.

مثال

(٣) **الربط بالتأمين** أمَّن رجل وزوجته على حياتيهما في إحدى شركات التأمين على الحياة فإذا قدرت الشركة احتمال أن يعيش الرجل أكثر من ٢٠ عامًا هو ٠,٢ واحتمال أن تعيش زوجته أكثر من نفس المدة ٠,٣ أوجد احتمال أن:

أ يعيش الرجل وزوجته معًا أكثر من ٢٠ عامًا. ب يعيش أحدهما على الأقل أكثر من ٢٠ عامًا.

جـ يعيش أحدهما فقط أكثر من ٢٠ عامًا.

الحل

نفرض أن: أ حدث أن يعيش الرجل أكثر من ٢٠ عاماً ل(أ) = ٠,٢ ،

ب حدث أن تعيش الزوجة أكثر من ٢٠ عاماً ل(ب) = ٠,٣

أ احتمال أن يعيش الرجل وزوجته معًا أكثر من ٢٠ عامًا = ل (أ ∩ ب)

∵ ل (أ ∩ ب) = ل (أ) × ل(ب) ∴ ل (أ ∩ ب) = ٠,٢ × ٠,٣ = ٠,٠٦

ب احتمال أن يعيش أحدهما على الأقل أكثر من ٢٠ عامًا = ل(أ ∪ ب)

∵ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب) ∴ ل (أ ∪ ب) = ٠,٢ + ٠,٣ − ٠,٠٦ = ٠,٤٤

ج ∵ احتمال أن يعيش أحدهما فقط أكثر من ٢٠ عامًا = ل (أ ∪ ب) - ل (أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∪ ب) - ل(أ ∩ ب) = ٠,٤٤ - ٠,٠٦ = ٠,٣٨

حاول أن تحل

③ **الربط بالرماية:** أطلق جنديان أ ، ب قذيفة نحو هدف ما، فإذا كان احتمال أن يصيب أ الهدف هو ٠,٦ وكان احتمال إصابة ب نفس الهدف ٠,٥ أوجد احتمالات الأحداث الآتية:

أ إصابة الهدف من الجندى أ والجندى ب معًا.
ب إصابة الهدف بقذيفة واحدة على الأقل.
ج إصابة الهدف بقذيفة واحدة فقط.
د عدم إصابة الهدف.

مثال

④ **السحب مع الإحلال:** كيس يحتوي على ٦ كرات زرقاء و ٤ كرات حمراء، إذا سُحبت كرة عشوائيًا ثم أُعيدت إلى الكيس، ثم سُحبت كرة ثانية، ما احتمال أن تكون:

أ الكرتان حمراوين في المرتين؟
ب الكرتان زرقاوين في المرتين؟
ج الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء؟
د إحداهما حمراء والأخرى زرقاء؟

الحل

أ طالما أن سحب الكرة مع الإحلال (الإرجاع) فيكون **الحدثان مستقلين**.

وبفرض أن: ف = فضاء العينة ، أ = سحب الكرة فى المرة الأولى ، ب = سحب الكرة فى المرة الثانية

∴ ن (ف) = ١٠ ، ل (أ) = $\frac{٤}{١٠}$ ، ل(ب) = $\frac{٤}{١٠}$ **(لأن السحب مع الاحلال)**

∵ ل (أ ∩ ب) = ل (أ) × ل (ب) ∴ ل (أ ∩ ب) = $\frac{٤}{١٠} \times \frac{٤}{١٠} = \frac{١٦}{١٠٠} = \frac{٤}{٢٥}$

بنفس الطريق السابقة يكون:

ب احتمال أن تكون الكرتان زرقاوين في المرتين = $\frac{٦}{١٠} \times \frac{٦}{١٠} = \frac{٣٦}{١٠٠} = \frac{٩}{٢٥}$

ج احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء = $\frac{٤}{١٠} \times \frac{٦}{١٠} = \frac{٢٤}{١٠٠} = \frac{٦}{٢٥}$

د احتمال أن تكون إحداهما حمراء والأخرى زرقاء = احتمال الأولى حمراء والثانية زرقاء + احتمال الأولى زرقاء والثانية حمراء

$= \frac{٤}{١٠} \times \frac{٦}{١٠} + \frac{٦}{١٠} \times \frac{٤}{١٠} = \frac{١٢}{٢٥}$

حاول أن تحل

④ إذا كان احتمال ارتفاع مؤشر سوق الأسهم فى الدولة (أ) يساوى ٠,٨٤ واحتمال ارتفاع مؤشر سوق الأسهم فى الدولة (ب) يساوى ٠,٧٥ ما احتمال أن يرتفع مؤشر سوقى أسهم الدولتين أ ، ب؟

تعلم الأحداث غير المستقلة *Dependent events*

يكون أ ، ب حدثين غير مستقلين إذا كان: ل (أ ∩ ب) ≠ ل (أ) × ل (ب)

لأننا نعلم من تعريف الاحتمال الشرطي أن:

ل (أ | ب) = $\frac{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ل}(\text{ب})}$ بشرط ل (ب) ≠ ٠

، ل (ب | أ) = $\frac{\text{ل}(\text{ب} \cap \text{أ})}{\text{ل}(\text{أ})}$ بشرط ل (أ) ≠ ٠

أي إنه يمكن كتابة ل (أ ∩ ب) = ل (أ | ب) × ل (ب)

= ل (ب | أ) × ل (أ) بشرط أن ل (أ) ≠ ٠ ، ل (ب) ≠ ٠

بمعنى أن الحدثين أ ، ب يكونان غير مستقلين إذا كان احتمال حدوث أحدهما يؤثر بطريقة ما في احتمال حدوث الآخر.

احتمال الأحداث غير المستقلة

مثال

٥ إذا كان ف فضاء العينة لتجربة عشوائية حيث ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨} وكان أ = {١ ، ٢ ، ٤ ، ٨}، ب = {٢ ، ٥ ، ٦ ، ٧} هل أ ، ب مستقلان؟ وضح إجابتك.

الحل

∵ ن(أ) = ٤ ∴ ل (أ) = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$ ، ∵ ن (ب) = ٤ ∴ ل (ب) = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$

∵ أ ∩ ب = {٢} ∴ ل(أ∩ب) = $\frac{١}{٨}$ (١)

∵ ل (أ) × ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٤}$ (٢)

من (١) ، (٢) ل (أ ∩ ب) ≠ ل(أ) × ل(ب) لذلك فإن أ ، ب حدثان غير مستقلين.

حاول أن تحل

٥ إذا كان جـ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧ } هل ب ، جـ مستقلان؟ وضح اجابتك.

السحب بدون إحلال

مثال

٦ كيس يحتوي على ٦ كرات زرقاء و ٤ كرات حمراء، إذا سُحبت كرتان الواحدة وراء الأخرى دون إحلال (دون إرجاع) ، ما احتمال أن تكون:

أ الكرتان حمراوين؟ ب الكرتان زرقاوين؟ جـ الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء؟

الحل

هذا المثال هو نفس مثال (٣) باختلاف أن سحب الكرات بدون إحلال (دون إرجاع) ، لذلك يكون الحدثان غير مستقلين.

أ إذا كانت الكرتان حمراوين فإن:

احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية حمراء =

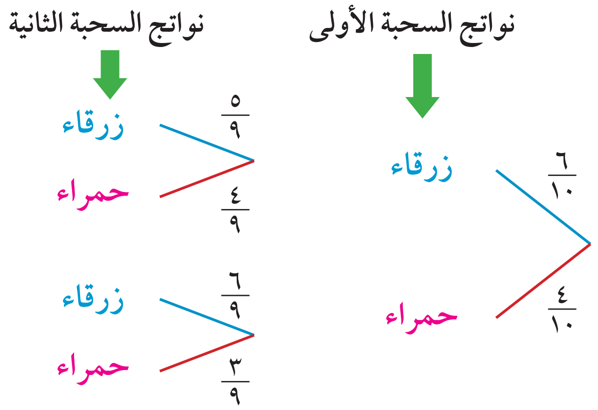
احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء × احتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء بعد سحب الكرة الحمراء الأولى

= $\frac{٤}{١٠}$ × $\frac{٣}{٩}$ = $\frac{٢}{١٥}$

ب إذا كانت الكرتان زرقاوين فإن: احتمال أن تكون الكرة الأولى زرقاء والثانية زرقاء = $\frac{٦}{١٠} \times \frac{٥}{٩} = \frac{١}{٣}$

ج احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء =
احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء × احتمال أن تكون الكرة الثانية زرقاء بشرط أن تكون الأولى حمراء
$= \frac{٤}{١٠} \times \frac{٦}{٩} = \frac{٤}{١٥}$

يمكن استخدام الشجرة البيانية كما هو موضح بالشكل لإيجاد نواتج الأحداث غير المستقلة.



حاول أن تحل

٦ كيس يحتوي على ٣ كرات حمراء و ٥ كرات سوداء إذا سُحبت كرتان الواحدة وراء الأخرى دون إحلال (إرجاع)، ما احتمال أن تكون:

أ الكرتان سوداوين؟ ب الأولى سوداء والثانية حمراء؟ ج إحدى الكرتين حمراء والأخرى سوداء؟

تمـــارين ٢ – ٢

١ أى من الأحداث التالية مستقلة وأيها غير مستقلة؟ فسر إجابتك:

أ إلقاء قطعة نقود معدنية، ثم إلقاء حجر نرد مرة واحدة.

ب سحب بطاقة من صندوق بدون إحلال، ثم سحب بطاقة أخرى من نفس الصندوق.

ج سحب بطاقة من صندوق مع الإحلال، ثم سحب بطاقة أخرى من نفس الصندوق.

د تأهل فريق كرة القدم إلى دور الأربعة، فإذا ربح فسوف يلعب فى مباراة البطولة.

هـ اختيار أحد الأسماء بالقرعة دون إحلال (إرجاع)، ثم اختيار اسمًا آخر.

و اختيار كرة من كيس ووضعها فى مكان آخر، ثم اختيار كرة أخرى من نفس الكيس.

ز تقدم كريم فى المسابقة الثقافية يوم الاثنين ونجح فيها، وتقدم للمسابقة العلمية يوم الخميس ونجح فيها أيضا.

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٢ إذا كان أ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب) = ٠,٦ فإن ل(أ ∪ ب) =

أ ٠,١٢ ب ٠,٣٢ ج ٠,٦٨ د ٠,٨

٣ إذا كان أ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٢٥ ، ل(ب) = ٠,٤ فإن ل(أ – ب) =

أ ٠,١ ب ٠,١٥ ج ٠,٣ د ٠,٦٥

٤ إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = س ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٧٢ فإن س تساوى:

أ ٠,٢٤ ب ٠,٢٨ ج ٠,٤ د ٠,٦

٥ إذا أُلقيت قطعة نقود ثم أُلقَي حجر نرد مرة واحدة. فما احتمال ظهور صورة والعدد ٣؟

٦ إذا أُلقيت قطعة نقود أربع مرات متتالية. فما احتمال الحصول على كتابة أربع مرات؟

٧ أُلقَي حجر نرد منتظم مرة واحدة، فإذا كان أ حدث ظهور عدد زوجى ، ب حدث ظهور عدد مربع. هل أ ، ب حدثان مستقلان؟ فسر إجابتك.

٨ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل(ب) = ٠,٣ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٥ أوجد قيمة ل (أ) إذا كان أ ، ب:

أ حدثين متنافيين. ب حدثين مستقلين .

٩ يحتوى كيس على مجموعة من البلي موزعة على النحو التالي ٢ حمراء ، ٣ خضراء واحدة زرقاء. اختيرت عشوائيًّا بلية واحدة مع الإحلال، ثم اختيرت بلية ثانية. اوجد احتمال إن تكون البليتان المختاران خضراوين؟

١٠ **فى السؤال السابق:** إذا اختيرت عشوائيًّا بلية واحدة بدون إحلال ثم اختيرت بلية ثانية ، أوجد احتمال أن تكون الأولى زرقاء والثانية خضراء.

١١ يحتوى كيس على الكرات التالية: ٦ حمراء ، ٤ برتقالية ، ٣ صفراء ، ٢ زرقاء و ٥ خضراء. اختيرت كرة عشوائيًّا بدون إحلال (إرجاع) ثم اختيرت كرة ثانية.
أوجد احتمال أن تكون الكرات المسحوبة:

أ حمراء و زرقاء. ب حمراء و صفراء. ج حمراء و حمراء. د برتقالية و زرقاء.

١٢ يصوب جنديان أ ، ب طلقة واحدة نحو هدف ما ، فإذا كان احتمال أن يصيب الجندي الأول الهدف هو ٠,٤ واحتمال أن يصيب الجندى الثانى الهدف هو ٠,٧.

أولًا: أوجد احتمال أن:

أ يصيب الجنديان الهدف معًا. ب يصيب أحدهما الهدف على الأقل.

ج يصيب أحدهما فقط الهدف. د يصيب أحدهما الهدف على الأكثر.

ثانيًا: إذا علمت أن أحدهما على الأقل أصاب الهدف، فأوجد احتمال أن يكون الجندى أ فقط قد أصاب الهدف.

١٣ إذا كان أ، ب حدثان مستقلان فاثبت أن كل من أزواج الأحداث الآتية يكون أيضا مستقلا

أ أ′، ب′ ب أ′، ب ج ا، ب′

ملخص الوحدة

١ **حساب احتمال حدث ما (وليكن أ)**

$$\text{ل(أ) (احتمال وقوع الحدث أ)} = \frac{\text{عدد عناصر الحدث ن(أ)}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة ن(ف)}}$$

٢ **الحدثان المتنافيان:** هما الحدثان اللذان لايشتركان فى أى عنصر وتقاطعهما هو المجموعة الخالية ϕ.

فإذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فإن: $\text{أ} \cap \text{ب} = \phi$

$\therefore$ ل $(\text{أ} \cap \text{ب})$ = صفر ويكون ل $(\text{أ} \cup \text{ب})$ = ل (أ) + ل (ب)

٣ **الحدثان غير المتنافيان:** هما الحدثان اللذان لا يمنع وقوع أحدها من وقوع الحدث الآخر (توجد عناصر مشتركة بينهما)، ويكون: ل $(\text{أ} \cup \text{ب})$ = ل (أ) + ل (ب) - ل $(\text{أ} \cap \text{ب})$

٣ **الاحتمال الشرطى:** إذا كانت ف فضاء العينة لتجربة عشوائية ما وكان أ ، ب حدثين من هذا الفضاء. فإن احتمال وقوع الحدث أ بشرط وقوع الحدث ب ويرمز له بالرمز ل (أ | ب) ويقرأ احتمال وقوع الحدث أ بشرط وقوع الحدث ب يتحدد بالعلاقة التالية:

$$\boxed{\text{ل (أ | ب)} = \frac{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ل(ب)}} \quad \text{حيث ل (ب)} > ٠}$$

٤ **الحدثان المستقلان :** يقال إن الحدثين أ، ب مستقلان إذا وإذا فقط ل $(\text{أ} \cap \text{ب})$ = ل (أ) × ل (ب).

أى إن احتمال وقوع حدثين مستقلين معًا يساوى احتمال وقوع الحدث الأول مضروبًا فى احتمال وقوع الحدث الثانى.

ويُلاحظ أنه إذا كان الحدثان أ ، ب مستقلين وكان ل(ب) $\neq$ صفر

فإن ل(أ | ب) = ل (أ)

أى إن وقوع أحد الحدثين لا يؤثر في احتمال وقوع الحدث الآخر.

٥ **الأحداث غير المستقلة :**

يكون أ ، ب حدثين غير مستقلين إذا كان: $\boxed{\text{ل } (\text{أ} \cap \text{ب}) \neq \text{ل(أ)} \times \text{ل (ب)}}$

لأننا نعلم من تعريف الاحتمال الشرطي أن:

$\text{ل (أ | ب)} = \frac{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ل(ب)}}$ بشرط ل (ب) $\neq ٠$ ، $\text{ل (ب | أ)} = \frac{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ل(أ)}}$ بشرط ل (أ) $\neq ٠$

أى إنه يمكن كتابة ل $(\text{أ} \cap \text{ب})$ = ل (أ | ب) × ل (ب)

= ل (ب | أ) × ل (أ) بشرط أن ل (أ) $\neq ٠$ ، ل (ب) $\neq ٠$

بمعنى أن: الحدثين أ ، ب يكونان غير مستقلين إذا كان احتمال حدوث أحدهما يؤثر بطريقة ما في احتمال حدوث الآخر.

تمـــارين عامة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كان أ، ب حدثين متنافيين وكان ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب′) = ٠,٦ فإن ل(أ ∪ ب) =

أ ٠,٤ ب ٠,٦ ج ٠,٨ د ١,٢

٢ إذا كان أ ⊂ ب وكان ل (أ′) = $\frac{٧}{١٠}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ فإن ل (أ | ب) تساوى:

أ $\frac{١}{٥}$ ب $\frac{٣}{٥}$ ج $\frac{٤}{٥}$ د $\frac{٣}{٢٠}$

٣ إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين وكان ل (أ) = ٠,٢ ، ل (ب) = ٠,٥ فإن ل(أ ∩ ب) =

أ ٠,٧ ب ٠,٤ ج ٠,٣ د ٠,١

٤ إذا كانت ف = {أ ، ب ، جـ} وكان أ ، ب ، جـ أحداث متنافية حيث ل (أ) = ٠,٢٥ ، ل(ب) = ٠,٤ فإن ل(جـ) =

أ ٠,١ ب ٠,١٥ ج ٠,٣٥ د ٠,٦٥

٥ إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين من ف حيث ل(ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٦٨ فإن ل (أ) =

أ ٠,٢ ب ٠,٣ ج ٠,٤ د ٠,٥

٦ في تجربة سحب كرة عشوائيًّا من صندوق يحوي ١٠ كرات حمراء تحمل الأعداد من ١ إلى ١٠، ٥ كرات زرقاء تحمل الأرقام الفردية من ١ إلى ٩. سُحبت كرة عشوائيًّا من الصندوق فوجدت إنها حمراء، فما احتمال أنها تحمل الرقم ٩؟

٧ إذا رسب ٢٥٪ من طلبة أحد الصفوف بمدرسة ما في الرياضيات، ورسب ١٠٪ منهم في الرياضيات والكيمياء. إذا اختير طالب عشوائيًّا، ما احتمال رسوبه في الكيمياء إذا كان راسبًا في الرياضيات؟

٨ الربط بالأسرة: عائلة لديها ثلاثة أطفال ، فإذا كان:

أ: حدث أن يكون لدى العائلة أطفال ذكورًا و إناثًا ب: حدث أن يكون لدى العائلة ولد واحد على الأكثر.

هل الحدثان أ ، ب مستقلان؟ وضح إجابتك.

٩ أُلقي حجر نرد منتظم مرة واحدة ثم أُديرت الدائرة الموضحة بالشكل الجانبي. أوجد احتمالات ظهور الأحداث الآتية:

أ ل(العدد ٣ ثم القطاع الأخضر) ب ل(عدد أولي ثم القطاع الأزرق)

ج ل(العدد ٥ ثم القطاع الأصفر) د ل(عدد زوجي ثم القطاع الأخضر)

١٠ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان:

ل (أ - ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٨}$ ، أوجد: ل (أ) ، ل (ب) ، ل(أ′ ∪ ب′)

١١ أُلقي حجرا نرد منتظم مرتين متتاليتين. أوجد احتمال:

أ ظهور العدد ٥ على أحد الوجهين علمًا بأن العدد نفسه ظهر عليهما.

ب ظهور العدد ٤ على أحد الوجهين علمًا بأن العددين الظاهرين كل منهما يزيد عن ٣.

ج عدم ظهور العدد ٣ على أي من الوجهين علمًا بأن العددين الظاهرين فرديان.

⑫ فى إحدى المسابقات أُعطى سؤال لمتسابقين أ ، ب فإذا كان احتمال حل المتسابق أ للسؤال ٠,٦ واحتمال حل المتسابق ب لنفس السؤال ٠,٨ فأوجد الاحتمالات الآتية:

أ حل السؤال من ب و أ معًا.
ب حل السؤال من أحدهما على الأقل.
ج عدم حل السؤال.

⑬ يحتوى كيس على ٢٦ بطاقة منها ١٠ بطاقات حمراء ، ١٦ بطاقة خضراء، سُحبت بطاقتان عشوائيًّا الواحدة تلو الأخرى دون إحلال (دون إرجاع) ما احتمال أن تكون:

أ الكرتان حمراوين؟
ب الكرتان خضروين؟
ج الكرة الأولى حمراء والثانية خضراء؟
د الكرة الأولى خضراء والثانية حمراء؟

⑭ أجريت مسابقة لتشكيل فريقين من الطلاب، حيث يتم سحب البطاقات عشوائيًّا من بين ٩ بطاقات مُرقَّمة من ١ إلى ٩ فإذا كان:

الفريق أ = تشكيل الطلاب الذين يسحبون الأعداد الفردية.

الفريق ب = تشكيل الطلاب الذين يسحبون الأعداد الزوجية.

أ إذا كان أحد الطلاب من الفريق أ فما احتمال سحب العدد ٧؟
ب إذا كان أحد الطلاب من الفريق ب فما احتمال سحب العدد ٤؟

⑮ الجدول الآتى يعرض توزيع ٥٠ شخصًا من حيث التدخين والاصابة بمرض ما:

ب \ أ	مريض	غير مريض
يدخن	٣٠	١٠
لا يدخن	٢	٨

إذا اختير شخص عشوائيًّا من هذه المجموعة فأوجد كلًّا من:

أ احتمال ان يكون هذا الشخص مريضًا
ب احتمال أن يكون هذا الشخص مريضًا بشرط أن يكون من المدخنين.
ج احتمال أن يكون هذا الشخص مريضًا بشرط أن يكون من غير المدخنين.

⑯ الجدول الآتى يبين توزيع مجموعة من ١٠ أشخاص:

	طالب	عامل
رياضى	٤	١
غير رياضى	٣	٢

إذا اختير شخصان عشوائيًّا فأوجد احتمال أن يكون أحدهما طالبًا رياضيًّا والآخر طالبًا غير رياضى .

أ إذا كان الاختيار مع الإحلال.
ب إذا كان الاختيار من غير إحلال.

لمزيد من الأنشطة والتدريبات زيارة الموقع الالكترونى www.sec3mathematics.com.eg

اختبار تراكمى

اسئلة ذات إجابات قصيرة

أولًا: أكمل ما يأتى:

(١) احتمال وقوع الحدث المستحيل = ...

(٢) عند القاء حجر نرد مرة واحدة فإن احتمال ظهور العدد ٣ على الوجه العلوى = ...

(٣) إذا أختير عشوائيًا أحد أرقام العدد ٣٧٤٥٠ فإن احتمال أن يكون الرقم المختار زوجيًا = ...

(٤) أكبر قيمة لمعامل الإرتباط إذا كان الإرتباط طرديًا تاما = ...

ثانيا : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٥) عند القاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة الوجه العلوى فإن احتمال ظهور عدد أكبر من أو يساوى ٦ يساوى:

أ صفر ب $\frac{١}{٦}$ جـ $\frac{٥}{٦}$ د ١

(٦) سلة بها ٤٨ كرة من نفس النوع بعضها أبيض وبعضها أحمر، والباقى أخضر، فإذا كان احتمال سحب كرة حمراء يساوى $\frac{٥}{٨}$ فإن عدد الكرات الحمراء فى السلة يساوى:

أ ٢٤ ب ٣٠ جـ ٣٢ د ٣٦

(٧) أقل معامل أرتباط فيما يلى هو:

أ -٠,٩ ب -٠,٥ جـ ٠,١ د ٠,٤

اسئلة ذات أجابات طويلة

(٨) احسب معامل ارتباط سبيرمان من بيانات الجدول التالى:

تقدير الرياضيات	ممتاز	جيد	جيد جدا	مقبول	جيد جدا	مقبول	جيد
تقدير الفيزياء	ضعيف	جيد جدا	مقبول	جيد جدا	مقبول	جيد جدا	جيد

(٩) فى مؤتمر عالمى ضم ١٥٠ عضوا وجد أن ١٠٠ عضو منهم يتكلمون الأنجليزية، ٦٠ عضوا يتكلمون الفرنسية، ٢٠ عضوا يتكلمون اللغتين معًا. أختير عضو عشوائيا أوجد أحتمال أن يكون الشخص المختار:

أ يتكلم أحد اللغتين على الأقل.

ب يتكلم اللغة الإنجليزية إذا كان يتكلم اللغة الفرنسية.

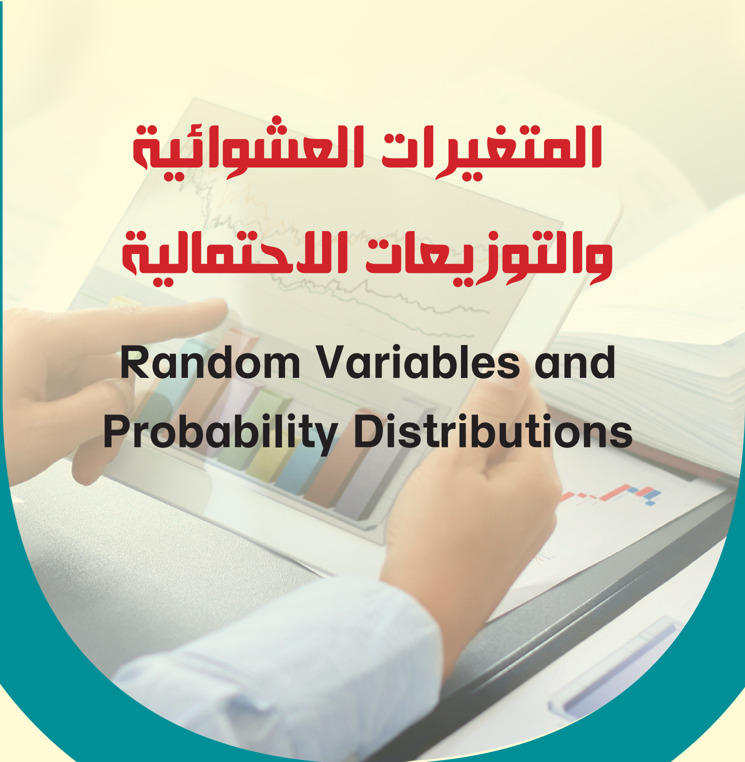
جـ يتكلم اللغة الفرنسية إذا كان يتكلم اللغة الأنجليزية.

(١٠) كيس يحتوى على ١٢ كرة صفراء و ٨ حمراء، إذا سحبت كرتان أحدهما وراء الأخرى دون إحلال (دون إرجاع)، ما احتمال أن تكون:

أ الكرتان صفراوين ب الكرة الأولى صفراء والثانية حمراء جـ الكرتان حمراوان

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

Random Variables and Probability Distributions



مقدمة الوحدة

سبق أن درسنا التجربة العشوائية وبعض مفاهيم الاحتمالات، وفى كثير من الحالات نرغب فى التعامل مع قيم كمية (عددية) مرتبطة بنتائج للتجربة العشوائية والتى تكون فى بعض الحالات صفات أو مسميات يصعب التعامل معها رياضيًا، وفى هذه الحالة نقوم بتحويل هذه القيم الوصفية إلى قيم عددية حقيقية تُسمى بالمتغير العشوائى والتى تستخدم للتعبير عن نتائج التجربة العشوائية، وسوف ندرس فى هذه الوحدة نوعين من المتغيرات العشوائية وهما:

- المتغيرات العشوائية المتقطعة Discrete Random Variables
- المتغيرات العشوائية المتصلة Continuous Random Variables

كما سندرس كذلك دوال التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية والتى تنقسم إلى:

- دالة التوزيعات الاحتمالية المتقطعة Probability Distribution Function of Discrete Random Variable
- دالة التوزيعات الاحتمالية المتصلة (دوال الكثافة) Probability Density Function

أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مفهوم المتغير العشوائى، ويُميز بين المتغير العشوائى المتقطع (المنفصل) والمتصل .
- يتعرف مفهوم دالة الكثافة لمتغير عشوائى متصل ويعرف خواصها ويستخدمها فى حساب احتمال وقوع قيمة المتغير العشوائى داخل فترة معينة.
- يتعرف مفهوم المتوسط (التوقع) والتباين.
- يستنتج الانحراف المعيارى لمتغير عشوائى.
- يعين معامل الاختلاف.
- يتعرف التوزيعات المتصلة.

المصطلحات الأساسية

- المتغير العشوائى Random Variable
- المتغير العشوائى المتقطع Discrete Random Variable
- التوزيعات الاحتمالية Probability Distributions
- التوقع (المتوسط) Expectation(Mean)
- التباين Variance
- معامل الاختلاف Coefficient of Variation
- كثافة احتمالية Probability Density

دروس الوحدة

الدرس (١ - ١): المتغير العشوائى المتقطع.

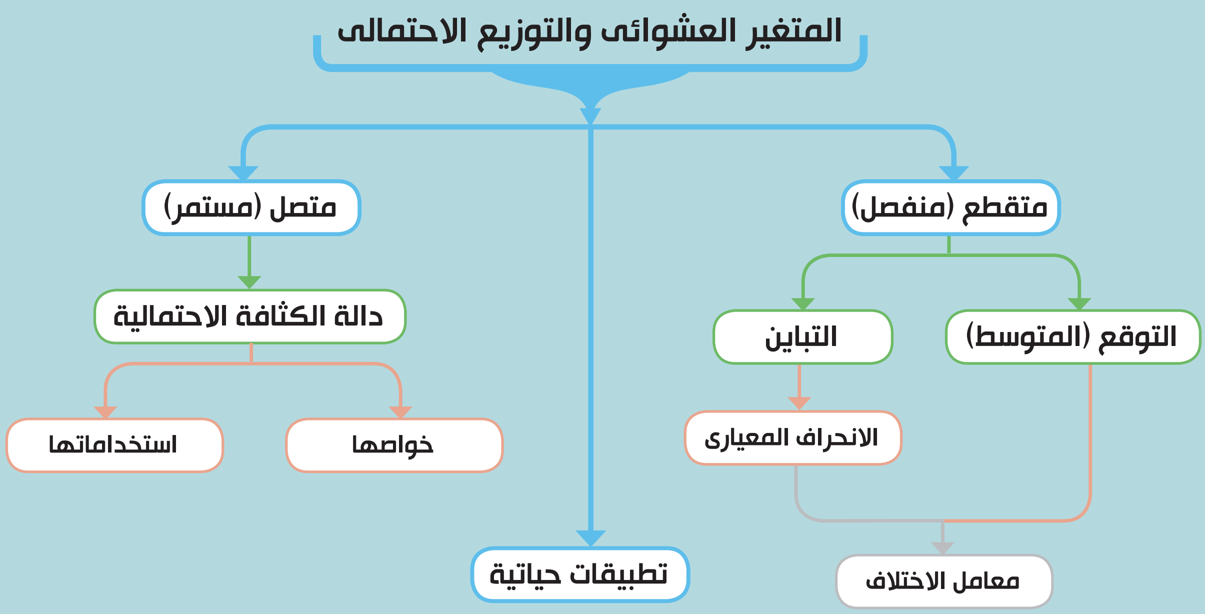
الدرس (١ - ٢): التوقع (المتوسط) والتباين للمتغير العشوائى المتقطع.

الدرس (١ - ٣): دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائى المتصل

الأدوات والوسائل

الة حاسبة علمية

مخطط تنظيمى للوحدة



الوحدة الثالثة

٣ - ١

المتغير العشوائي المتقطع

Random Variable

سوف تتعلم

- المتغير العشوائى
- المتغير العشوائى المتقطع
- المتغير العشوائى المتصل
- التوزيعات الاحتمالية

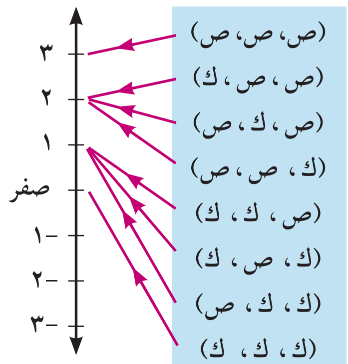
المصطلحات الأساسية

- المتغير العشوائى *Random Variable*
- المتغير العشوائى المستمر *Continuous Random Variable*
- المتغير العشوائى المتقطع *Discrete Random Variable*
- التوزيعات الاحتمالية *Probability Distributions*

مقدمة: سبق أن درست التجربة العشوائية، وأمكنك إيجاد فضاء العينة لها، وفى هذا الدرس سوف نتعرف متغيرًا جديدًا مرتبطًا بهذه التجربة العشوائية وهو المتغير العشوائى.

وسوف ندرس فى هذا الدرس كيفية وصف مفردات ظاهرتين مختلفتين من حيث العلاقة بينهما.

المتغير العشوائى:



فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية فإن فضاء العينة ف يتحدد كما فى الشكل المقابل. فإذا طُلب فى هذه التجربة إيجاد «عدد الصور» التى تظهر فى فضاء العينة ف فإننا نرسم مخططًا يظهر العلاقة بين ف (كمتغير مستقل)، وعدد الصور وهو عدد حقيقى ح «كمتغير تابع» وهذه العلاقة تعبر عن دالة، وتكتب رمزيًا كالآتى: سـ : ف ← ح حيث سـ يرمز إلى المتغير العشوائى.

تعريف المتغير العشوائى هو دالة مجالها مجموعة عناصر فضاء العينة ف ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

تذكر أن

تتحدد الدالة بالآتى:

- المجال
- المجال المقابل
- قاعدة الدالة

مدى الدالة هو مجموعة صور عناصر المجال فى المجال المقابل

ويكون مدى المتغير العشوائى سـ فى المثال السابق = {٠، ١، ٢، ٣}

لاحظ أن: المتغير العشوائى يجزئ فضاء العينة ف إلى أحداث متنافية، كل حدث منها يرتبط بعدد حقيقى، وهذا الارتباط يُعبر عن دالة سـ من فضاء العينة ف إلى مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

المتغير العشوائى المتقطع *Discrete Random Variable*

تعريف المتغير العشوائى المتقطع (المنفصل أو الوثاب): مداه مجموعة محدودة (منتهية) أى قابلة للحصر من الأعداد الحقيقية.

ومن أمثلة ذلك:

- عدد الأسهم المخصصة لأحد الأفراد فى اكتتاب شركة مساهمة.

الأدوات المستخدمة آلة حاسبة علمية. برامج رسومية للحاسب.

- عدد الحوادث على إحدى الطرق السريعة خلال أسبوع.
- عدد المكالمات التليفونية الصادرة لأسرة خلال شهر.

مثال

المتغير العشوائي المتقطع

(١) في تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، إذا كان المتغير العشوائي س يعبر عن « عدد الصور – عدد الكتابات » اكتب مدى المتغير العشوائي.

الحل

ف = {(ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ، (ص ، ك ، ك) ، (ك ، ص ، ص) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك)}

فضاء العينة ف	س: عدد الصور – عدد الكتابات
(ص ، ص ، ص)	٣ – ٠ = ٣
(ص ، ص ، ك)	٢ – ١ = ١
(ص ، ك ، ص)	٢ – ١ = ١
(ص ، ك ، ك)	١ – ٢ = –١
(ك ، ص ، ص)	٢ – ١ = ١
(ك ، ص ، ك)	١ – ٢ = –١
(ك ، ك ، ص)	١ – ٢ = –١
(ك ، ك ، ك)	٠ – ٣ = –٣

مدى المتغير العشوائي = {-٣ ، -١ ، ١ ، ٣}

حاول أن تحل

(١) في المثال السابق أوجد مدى المتغير العشوائي الذي يعبر عن: عدد الصور × عدد الكتابات.

مثال

المتغير العشوائي المتقطع

(٢) أُلقي حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين ، أوجد المتغير العشوائي الذي يعبر عن مجموع العددين الظاهرين.

الحل

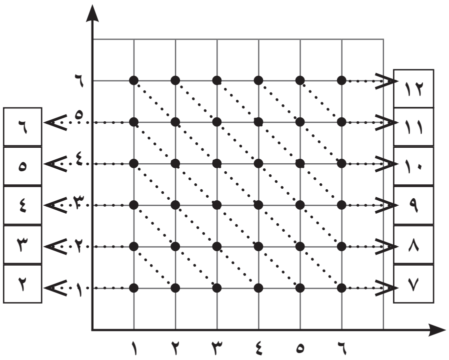
فضاء العينة ف	س : مجموع العددين
(١ ، ١)	٢
(١ ، ٢) ، (٢ ، ١)	٣
(٣ ، ١)، (٢ ، ٢)، (١ ، ٣)	٤
(٤ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (١ ، ٤)	٥
(٥ ، ١)، (٤ ، ٢)، (٣ ، ٣)، (٢ ، ٤)، (١ ، ٥)	٦

فضاء العينة ف	س : مجموع العددين
(٦ ، ١)، (٥ ، ٢)، (٤ ، ٣)، (٣ ، ٤)، (٢ ، ٥)، (١ ، ٦)	٧
(٦ ، ٢)، (٥ ، ٣)، (٤ ، ٤)، (٣ ، ٥)، (٢ ، ٦)	٨
(٦ ، ٣)، (٥ ، ٤)، (٤ ، ٥)، (٣ ، ٦)	٩
(٦ ، ٤) ، (٥ ، ٥) ، (٤ ، ٦)	١٠
(٦ ، ٥) ، (٥ ، ٦)	١١
(٦ ، ٦)	١٢

من الجدول السابق نجد أن مدى المتغير العشوائى

سـ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢}

يمكن استخدام الشكل الجانبى لإيجاد مدى المتغير العشوائى سـ.



حاول أن تحل

(٢) فى المثال السابق أوجد مدى المتغير العشوائى الذى يعبر عن: «أكبر العددين الظاهرين».

التوزيعات الاحتمالية

دالة التوزيعات الاحتمالية المتقطعة *Probability Distribution Function of Discrete Random Variable*

تعريف

إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه المجموعة: {$س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، ...... ، $س_ر$} فإن الدالة د المعرفة كالآتى: د($س_ر$) = ل (سـ = $س_ر$) لكل ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ......

تحدد ما يسمى بدالة التوزيعات الاحتمالية المتقطعة للمتغير العشوائى سـ والذى يعبر عنه بمجموعة الأزواج المرتبة المحددة لبيان الدالة د .

أى أن التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ = {($س_١$ ، د($س_١$)) ، ($س_٢$ ، د($س_٢$)) ، ($س_٣$ ، د($س_٣$)) ، .... ، ($س_ن$ ، د($س_ن$))}

ملاحظة: يمكن كتابة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ فى صورة جدول كالآتى:

$س_ر$	$س_١$	$س_٢$	$س_٣$	......	$س_ن$
د($س_ر$)	د($س_١$)	د($س_٢$)	د($س_٣$)	......	د($س_ن$)

ويلاحظ أن الدالة د فى التعريف السابق تحقق الشرطين الآتيين.

١- د($س_ر$) $\geqslant$ ٠ لكل ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ...... ، ن

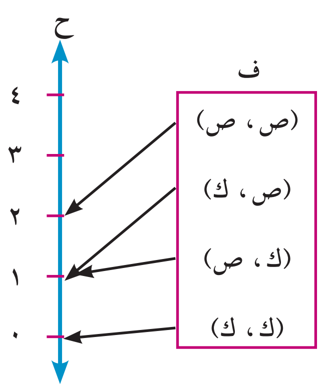
٢- د($س_١$) + د($س_٢$) + د($س_٣$) + ... + د($س_ر$) = ١

مثال

دالة التوزيع الاحتمالى

(٣) أُلقيت قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة الوجه الظاهر ، اكتب دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ الذى يعبر عن عدد مرات ظهور الصورة.

الحل



ف = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)}

نجد من الشكل الجانبى أن مدى المتغير العشوائى الذى يعبر عن عدد ظهور صورة = {٠ ، ١ ، ٢}

د(٠) = ل (سـ = ٠) = $\frac{ن(سـ_١)}{ن(ف)} = \frac{١}{٤}$

$د(١) = ل(سـ = ١) = \frac{ن(سـ_٢)}{ن(ف)} = \frac{٢}{٤}$ ، $د(٢) = ل(سـ = ٢) = \frac{ن(سـ_٣)}{ن(ف)} = \frac{١}{٤}$

وتكون دالة التوزيع الاحتمالي هي:

سـر	٠	١	٢
د(سـر)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٤}$

حاول أن تحل

٣ في المثال السابق اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ الذي يعبر عن:(عدد مرات ظهور الصورة – عدد مرات ظهور الكتابة).

مثال

السحب دون إحلال

٤ صندوق به ٥ بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٥ ، سُحبت منه بطاقتان واحدة بعد الأخرى بدون إحلال (دون إرجاع) ، أوجد دالة التوزيع الاحتمالي لكل من المتغير العشوائي الذي يعبر عن أصغر العددين على البطاقتين المسحوبتين.

الحل

طالما أن سحب البطاقات يتم بدون إرجاعها إلى الصندوق ، فإن البطاقة التي تسحب لا تتكرر ثانية، بمعنى أن أزواج البطاقات التي تحمل الأرقام (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥) لا تكون ضمن فضاء العينة كما هو موضح بالشكل المقابل.

ن(ف) = ٢٠

من الشكل المقابل نجد أن مدى المتغير العشوائي سـ هو:

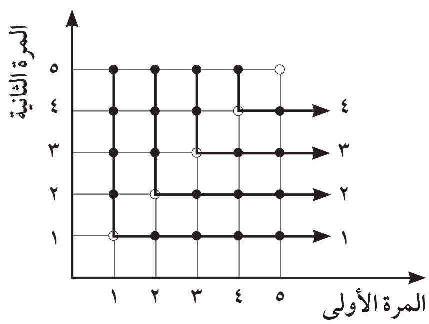
سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } وأن:

$د(١) = ل(سـ = ١) = \frac{٨}{٢٠}$

$د(٢) = ل(سـ = ٢) = \frac{٦}{٢٠}$

$د(٣) = ل(سـ = ٣) = \frac{٤}{٢٠}$

$د(٤) = ل(سـ = ٤) = \frac{٢}{٢٠}$



دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ يعطى كما بالجدول الآتي:

سـر	١	٢	٣	٤
د(سـر)	$\frac{٨}{٢٠}$	$\frac{٦}{٢٠}$	$\frac{٤}{٢٠}$	$\frac{٢}{٢٠}$

حاول أن تحل

٤ في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوي في كل مرة ، أوجد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يعبر عن أكبر العددين الظاهرين على الوجهين العلويين.

مثال

استخدام قاعدة الدالة

٥ إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا ودالة توزيعه الاحتمالى تتحدد بالعلاقة:

د(س) = $\frac{ك + ٢ س}{٢٤}$ حيث س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ فأوجد قيمة ك ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالى.

الحل

∵ د(٠) = ل(س = ٠) = $\frac{ك}{٢٤}$ ، د(١) = ل(س = ١) = $\frac{ك + ٢}{٢٤}$ ،

د(٢) = ل(س = ٢) = $\frac{ك + ٤}{٢٤}$ ، د(٣) = ل(س = ٣) = $\frac{ك + ٦}{٢٤}$

∵ ل(س = ٠) + ل(س = ١) + ل(س = ٢) + ل(س = ٣) = ١

∴ $\frac{ك}{٢٤}$ + $\frac{ك + ٢}{٢٤}$ + $\frac{ك + ٤}{٢٤}$ + $\frac{ك + ٦}{٢٤}$ = ١

∴ $\frac{ك + ك + ٢ + ك + ٤ + ك + ٦}{٢٤}$ = ١ ∴ ٤ ك + ١٢ = ٢٤

∴ ٤ ك = ٢٤ − ١٢ ∴ ٤ ك = ١٢ ∴ ك = ٣

لإيجاد دالة التوزيع الاحتمالى نوجد:

ل(س = ٠) = $\frac{ك}{٢٤}$ = $\frac{٣}{٢٤}$ ، ل(س = ١) = $\frac{ك + ٢}{٢٤}$ = $\frac{٥}{٢٤}$

ل(س = ٢) = $\frac{ك + ٤}{٢٤}$ = $\frac{٧}{٢٤}$ ، ل(س = ٣) = $\frac{ك + ٦}{٢٤}$ = $\frac{٩}{٢٤}$

∴ دالة التوزيع الاحتمالى هى:

$س_ر$	٠	١	٢	٣
د($س_ر$)	$\frac{٣}{٢٤}$	$\frac{٥}{٢٤}$	$\frac{٧}{٢٤}$	$\frac{٩}{٢٤}$

حاول أن تحل

٥ إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه = { ١ ، ٢ ، ٣ } ودالة توزيعه الاحتمالى تتحدد بالعلاقة د(س) = $\frac{أ س}{٩}$

أوجد قيمة أ ، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالى.

تمــارين ٣ – ١

أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

① أيٌّ من الدوال الآتية تمثل دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س:

أ

سر	١	٢	٣	٤
د(سر)	٠,٠٦	٠,١٥	٠,٤٢	٠,٢٦

ب

سر	٠	١	٣	٥
د(سر)	٠,٥	٠,٣	٠,٤	-٠,٢

جـ

سر	-٢	-١	١	٢
د(سر)	٠,٣٢	٠,١٤	٠,٢٣	٠,٣١

د

سر	٣	٤	٥	٦
د(سر)	٠,٢٣	٠,٣٢	٠,١٧	٠,١٨

② إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا مداه { ٠ ، ١ ، ٢ } ، فإن جميع الدوال الآتية لا تمثل دالة التوزيع الاحتمالى له ماعدا الدالة:

أ د(س) = $\frac{س^{٢} + ١}{٨}$ ب د(س) = $\frac{٢س + ١}{٣}$ جـ د(س) = $\frac{١}{س + ٢}$ د د(س) = $\frac{٣س - ١}{٦}$

③ إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا مداه {١ ، ٢ ، ٣} وكان ل(س = ١) = ٠,٣ ، ل(س = ٢) = ٠,٥ فإن ل(س = ٣) تساوى:

أ ٠,١ ب ٠,٢ جـ ٠,٧ د ٠,٨

④ إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا مداه {١ ، ٢ ، -١ ، ٠ } وكان ل(س = -١) = ٠,٢ ، ل(س = ٠) = ٠,٤ ، ل(س = ١) = ٠,١ فإن ل(س > ١) تساوى::

أ ٠,٣ ب ٠,٤ جـ ٠,٥ د ٠,٦

⑤ فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية وكان س هو المتغير العشوائى الذى يعبر عن: «عدد الصور – عدد الكتابات» فإن مدى س هو:

أ {١ ، ٣} ب {٠ ، ١ ، ٣} جـ {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} د {-٣ ، -١ ، ١ ، ٣}

⑥ إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه = {٠ ، ١ ، ٢ } ودالة توزيعه الاحتمالى تتحدد بالعلاقة: د(س) = $\frac{أ س}{٦}$ فإن قيمة أ تساوى:

أ $\frac{١}{٢}$ ب ١ جـ $\frac{٣}{٢}$ د ٢

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

⑦ الجدولان الأتيان يبينان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س ، أوجد قيمة أ فى كل جدول:

أ

سر	١	٢	٢	٣
د(سر)	أ	٢أ	٢أ	٣أ

ب

سر	-٢	-١	٠	١	٢
د(سر)	أ	٠,٢	٠,٣	٣أ	أ

جـ

سر	٠	١	٣	٤
د(سر)	أ	$٢أ^{٢}$	$٣أ^{٢}$	٣أ

٨) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } وكانت قيم ل (سـ = ٠) = ٠,٢ ، ل (سـ = ١) = ٠,٣٣ ، ل (سـ = ٢) = ٠,٣٧ فأوجد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ.

٩) إذا كانت قيم المتغير العشوائى سـ فى تجربة عشوائية هى: -٢ ، ٠ ، ٢ ، ٤ باحتمالات قدرها $\frac{م}{٥}$ ، $\frac{م + ١}{٥}$ ، $\frac{٢م - ١}{٥}$ ، $\frac{٣م - ٢}{٥}$ على الترتيب فأوجد قيمة م ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير سـ .

١٠) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا ودالة توزيعه الاحتمالى يتحدد بالعلاقة:

د(س) = $\frac{٢أ + ٣س}{٥٤}$ ومدى سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } أوجد قيمة أ واكتب دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير سـ.

١١) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا وتوزيعه الاحتمالى يتحدد بالدالة د(س) = $\frac{ك + ٣ س}{٥٠}$:
حيث س = ١ ، ٢ ، ٣، ٤ فأوجد قيمة ك، ثم اكتب التوزيع الاحتمالى للمتغير سـ

١٢) فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية ، إذا كان المتغير العشوائى سـ يعبر عن « عدد الصور – عدد الكتابات » فاكتب التوزيع الاحتمالى للمتغير سـ

١٣) صندوقان بكل منهما ثلاث كرات مرقمة من ٣ إلى ٥ سحبت كرة عشوائيًّا من كل صندوق وعرف المتغير العشوائى سـ بأنه « مجموع العددين » الموجودين على الكرتين المسحوبتين. أوجد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ.

١٤) فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى فى كل مرة ، اكتب التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ الذى يعبر عن « أصغر العددين الظاهرين ».

١٥) صندوق به ٤ كرات مرقمة من ١ الى ٤ ، سحبت منه كرتان واحدة بعد الأخرى (مع الإحلال) ، اكتب التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ الذى يعبر عن « المتوسط للرقمين على الكرتين المسحوبتين ».

١٦) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا يعبر عن عدد البنات فى أسرة لديها ثلاثة أطفال ، اكتب مدى المتغير العشوائى سـ ، وإذا فرضنا أن احتمال إنجاب ولد يساوى احتمال إنجاب بنت بفرض عدم وجود توأم. أوجد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ « يراعى ترتيب الأولاد والبنات ».

التوقع(الوسط) والتباين للمتغير العشوائى المتقطع

Expectation and Variance of a Discrete Random Variable

سوف تتعلم

- التوقع (المتوسط)
- التباين
- الانحراف المعيارى
- معامل الاختلاف

المصطلحات الأساسية

- التوقع (المتوسط) *Expectation(Mean)*
- التباين *Variance*
- معامل الاختلاف: *Coefficient of Variation*

مقدمة: لتحديد صفات التوزيع الاحتمالى (أى تحديد صفات المجتمع الأصلى أو للمقارنة بين المجتمعات المختلفة) فإنه يلزمنا بعض المعالم الأساسية لقياس القيمة المتوسطة لها وهى القيمة التى تتجمع حولها القيم الممكنة للمتغير العشوائى وتعرف بالتوقع (المتوسط) ، وهناك أيضًا قيم أخرى تقيس تشتت قيم المتغير العشوائى عن قيمة المتوسط تعرف بالتباين ، لذلك فإن التوقع والتباين يلخصان أهم صفات المتغيرات العشوائية.

التوقع (المتوسط): *Expectation (Mean)*

التوقع هو القيمة التى تتمركز عندها معظم قيم المتغير العشوائى ويسمى أحيانًا « المتوسط» ويرمز له بالرمز (μ) ويقرأ (ميو).

فإذا كان س متغير عشوائيًّا متقطعًا دالة التوزيع الاحتمالى له هى د ومداه هو:{ $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، .... ، $س_ن$}

باحتمالات د($س_١$) ، د($س_٢$) ، د($س_٣$) ، .... ، د($س_ن$) على الترتيب فإن التوقع يعطى بالعلاقة:

$$\boxed{\text{التوقع } (\mu) = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر \times د(س_ر)}$$

أى أن: التوقع (μ) = $س_١$ × د($س_١$) + $س_٢$ × د($س_٢$) + $س_٣$ × د($س_٣$) + ... + $س_ن$ × د($س_ن$)

مثال

١ إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا توزيعه الاحتمالى مبينًا بالجدول الآتى:

$س_ر$	١-	٠	١	٢	٣
د($س_ر$)	٠,٣	٠,١	٠,١	أ	٠,٢

أولًا: أوجد قيمة أ **ثانيًا:** أوجد التوقع (المتوسط)

الحل

أولًا: نعلم أن مجموع الاحتمالات يساوى الواحد الصحيح

∵ ل(س = - ١) + ل(س = ٠) + ل(س = ١) + ل(س = ٢) + ل(س = ٣) = ١

∴ ٠,٣ + ٠,١ + ٠,١ + أ + ٠,٢ = ١

∴ أ + ٠,٧ = ١ ∴ أ = ١ - ٠,٧ = ٠,٣

الأدوات المستخدمة آلة حاسبة علمية. برامج رسومية للحاسب.

ثانيًا:

$\because$ التوقع $(\mu) = \sum_{ر=1}^{ن}$ س$_ر$ × د(س$_ر$) = -١ × ٠,٣ + ٠ × ٠,١ + ١ × ٠,١ + ٢ × ٠,٣ + ٣ × ٠,٢

= -٠,٣ + ٠ + ٠,١ + ٠,٦ + ٠,٦ = ١

حاول أن تحل

(١) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا مداه = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} وكان:

ل(س = ٠) = ل (س = ٤) = $\frac{١}{١٦}$ ، ل (س = ١) = ل (س = ٣) = $\frac{١}{٤}$

أوجد: **أولًا**: ل (س = ٢)   **ثانيًا**: التوقع

مثال

(٢) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا توزيعه الاحتمالى كالآتى:

س$_ر$	٠	١	٢	ب	٦
د(س$_ر$)	٠,١	٠,١	٠,٣	أ	٠,٣

احسب قيمة أ ، ب إذا كان التوقع μ = ٣,٥

الحل

من خواص التوزيع الاحتمالى: د(٠) + د(١) + د(٢) + د(ب) + د(٦) = ١

$\therefore$ ٠,١ + ٠,١ + ٠,٣ + أ + ٠,٣ = ١ $\therefore$ أ = ١ - ٠,٨   **أ = ٠,٢**

$\because$ التوقع $(\mu) = \sum_{ر=1}^{ن}$ س$_ر$ × د(س$_ر$) = ٣,٥

$\therefore$ ٠ × ٠,١ + ١ × ٠,١ + ٢ × ٠,٣ + ب × ٠,٢ + ٦ × ٠,٣ = ٣,٥

$\therefore$ ٠ + ٠,١ + ٠,٦ + ٠,٢ ب + ١,٨ = ٣,٥ $\therefore$ ٠,٢ ب = ٣,٥ - ٢,٥

$\therefore$ ب = ١ ÷ ٠,٢ = ٥   **ب = ٥**

حاول أن تحل

(٢) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا توزيعه الاحتمالى مبينًا بالجدول الآتى:

س$_ر$	٠	٢	٣	٤
د(س$_ر$)	$\frac{٣}{١٦}$	٢ ل	$\frac{١}{١٦}$	ل

أولًا: أوجد قيمة ل   **ثانيًا**: أوجد التوقع

التباين: *Variance*

التباين لمتغير عشوائى متقطع س يقيس مقدار التشتت للمتغير العشوائى عن قيمته المتوقعة، ويرمز له بالرمز (σ^2) ويقرأ (سيجما تربيع) ويعطى بالعلاقة:

$$\sigma^2 = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر^2 \times د(س_ر) - \mu^2$$

ملاحظة: الانحراف المعيارى للمتغير العشوائى سـ هو الجذر التربيعى للتباين ويرمز له بالرمز σ ، ويلاحظ أن التباين والانحراف المعيارى كميات موجبة دائمًا.

مثال

٣ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا ودالة توزيعه الاحتمالى هى $د(س) = \frac{س + ٤}{١٦}$ حيث س = -٢ ، م ، ١ ، ٢ فأوجد قيمة م ثم أوجد المتوسط والتباين للمتغير العشوائى سـ .

الحل

من خواص دالة التوزيع الاحتمالى:

$\because ل(س = -٢) + ل(س = م) + ل(س = ١) + ل(س = ٢) = ١$

$\therefore \frac{٢}{١٦} + \frac{م + ٤}{١٦} + \frac{٥}{١٦} + \frac{٦}{١٦} = ١$

$\therefore \frac{١٧ + م}{١٦} = ١$ $\quad \therefore ١٧ + م = ١٦$ $\quad \therefore م = -١$

$س_ر$	$د(س_ر)$	$س_ر \cdot د(س_ر)$	$س_ر^٢ \cdot د(س_ر)$
−٢	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{-٤}{١٦}$	$\frac{٨}{١٦}$
−١	$\frac{٣}{١٦}$	$\frac{-٣}{١٦}$	$\frac{٣}{١٦}$
١	$\frac{٥}{١٦}$	$\frac{٥}{١٦}$	$\frac{٥}{١٦}$
٢	$\frac{٦}{١٦}$	$\frac{١٢}{١٦}$	$\frac{٢٤}{١٦}$
		$\frac{٥}{٨}$	$\frac{٥}{٢}$

التوقع $(\mu) = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر \times د(س_ر) = \frac{٥}{٨}$

التباين $(\sigma^٢) = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر^٢ \times د(س_ر) - \mu^٢ = \frac{٥}{٢} - (\frac{٥}{٨})^٢ = \frac{١٣٥}{٦٤}$

حاول أن تحل

٣ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا توزيعه الاحتمالى يتحدد بالدالة $د(س) = \frac{أ}{س + ١}$

حيث سـ = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ أوجد: **أولًا**: قيمة أ **ثانيًا**: التوقع والانحراف المعيارى للمتغير العشوائي سـ.

معامل الاختلاف: *Coefficient of Variation*

عند دراستنا للانحرف المعيارى كمقياس لتشتت قيم المتغير العشوائى عن توقعه علمنا بأنه يقاس بنفس وحدات المتغير موضوع البحث سواء كانت هذه الوحدات درجات أو أمتار أو كجم .. إلخ أى أنه يصلح أيضًا فى مقارنة مجموعتين لهما نفس الوحدات ونفس المتوسطات. أما إذا اختلفت الوحدات أو المتوسطات بين المجموعتين فإنه يتعذر استخدام الانحراف المعيارى كمقياس للمقارنة ومن هنا نشأت الحاجة إلى مقياس نسبى للتشتت يخلصنا من هذه الوحدات المختلفة ويمثل معامل الاختلاف حلًّا مناسبًا لهذه المشكلة .

يعرف معامل الاختلاف لأى مجموعة من المفردات بأنه النسبة المئوية بين الانحراف المعيارى للمجموعة والتوقع (المتوسط) لها و يتحدد كما فى العلاقة الآتية:

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{المتوسط}} \times ١٠٠ \% = \frac{\sigma}{\mu} \times ١٠٠\%$$

وهذا المعامل يصور تشتت المجموعة فى صورة نسبة مئوية مجردة من التمييز بحيث لا تتأثر بالوحدات المقيسة بها الظاهرة.

مثال

٤ إذا كان التوقع والانحراف المعيارى لدرجات مجموعة من الطلاب فى مادتى التاريخ والجغرافيا كانت على النحو التالى ، علمًا بأن الدرجة النهائية هى ١٠٠.

المقاييس	امتحان التاريخ	امتحان الجغرافيا
التوقع	٧٠	٩٦
الانحراف المعيارى	٧	٨

أوجد معامل الاختلاف لكل مادة – ماذا تلاحظ ؟

الحل

$\because$ معامل الاختلاف = $\frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{المتوسط}} \times ١٠٠ \%$

$\therefore$ معامل الاختلاف لمادة التاريخ = $\frac{٧}{٧٠} \times ١٠٠ \% = ١٠ \%$ ،

معامل الاختلاف لمادة الجغرافيا = $\frac{٨}{٩٦} \times ١٠٠ \% \simeq ٨,٣ \%$

نلاحظ من الحل: أن التشتت النسبى لامتحان مادة التاريخ أكبر من التشتت النسبى لامتحان مادة الجغرافيا، وهذا معناه أن امتحان مادة الجغرافيا أكثر تجانسًا من امتحان مادة التاريخ.

حاول أن تحل

٤ إذا كان أحد المصانع ينتج نوعين من المصابيح أ ، ب وكان متوسط العمر لهما بالساعة ١٨٥٠، ١٥٨٠ وانحرافهما المعيارى بالساعة ٢٥٠ ، ٢٣٠ على الترتيب اوجد معامل الاختلاف لكل نوع - ماذا تلاحظ؟.

مثال

٥ كيس به ٦ بطاقات، منها بطاقتان تحملان العدد ٢ وثلاث بطاقات تحملان العدد٣ وبطاقة تحمل العدد ١١ ، فإذا سحبت بطاقة واحدة عشوائية وعرف المتغير العشوائى سـ بأنه «العدد الظاهر على البطاقة المسحوبة».

أوجد:

أ دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير س.

ب التوقع والانحراف المعيارى للمتغير س   ج معامل الاختلاف.

الحل

أ س تأخذ القيم ٢ ، ٣ ، ١١ حيث: د(٢) = ل (س = ٢) = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

د(٣) = ل (س = ٣) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$ ، د (١١) = ل(س = ١١) = $\frac{١}{٦}$

والجدول التالى يبين دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائي س.

سر	٢	٣	١١
د(سر)	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٦}$

ولحساب التوقع والانحراف المعيارى نكون الجدول التالى:

سر	د(سر)	سر • د(سر)	$س^٢_ر$ • د(سر)
٢	$\frac{٢}{٦}$	$\frac{٤}{٦}$	$\frac{٨}{٦}$
٣	$\frac{٣}{٦}$	$\frac{٩}{٦}$	$\frac{٢٧}{٦}$
١١	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١١}{٦}$	$\frac{١٢١}{٦}$
المجموع		٤	٢٦

ب التوقع (μ) = $\sum_{ر=١}^{ن}$ سر × د(سر) = ٤

التباين ($\sigma^٢$) = $\sum_{ر=١}^{ن}$ $س^٢_ر$ × د(سر) − $\mu^٢$ = ٢٦ − $(٤)^٢$ = ١٠

الانحراف المعيارى σ = $\sqrt{١٠}$ = ٣,١٦

ج ∵ معامل الاختلاف = $\frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{المتوسط}}$ × ١٠٠ ٪

∴ معامل الاختلاف = $\frac{٣,١٦}{٤}$ × ١٠٠ ٪ = ٧٩ ٪

حاول أن تحل

٥ كيس يحتوى على ١٠ بطاقات واحدة تحمل الرقم ١ ، بطاقتان تحمل كل منهما الرقم ٢ ، ثلاث بطاقات تحمل كل منهما الرقم ٣ ،ر أربع بطاقات تحمل كل منهما الرقم ٤ ، فإذا سحب من الكيس عشوائيًّا إحدى هذه البطاقات وكان المتغير العشوائى س يعبر عن العدد على البطاقة المسحوبة فأوجد دالة التوزيع الاحتمالى لهذا المتغير واحسب كلًّا من التوقع وانحرافه المعيارى ومعامل الاختلاف.

تمـــاريـن ٣ – ٢

أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س هو {(٠ ، ٠,٢٥) ، (١ ، ٠,٥) ، (٢ ، ٠,٢٥)} فإن التوقع يساوى:

أ ٠,٥ ب ١ ج ١,٢٥ د ١,٥

(٢) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا وكان التوقع يساوى ٠,٦ ، $\sum_{ر=١}^{ن}$ س$_ر^٢$ × د(س ر) = ٤,٣٦ فإن الانحراف المعيارى له يساوى:

أ ١,٩٤ ب ٢ ج ٣,٧٦ د ٤

(٣) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا وكان التوقع يساوى ٠,٤ ، $\sum$ س$_ر^٢$ × د(س ر) = ٦,١٦ فإن التباين له يساوى:

أ ٢,٤ ب ٥,٧٦ ج ٦ د ٦,٥٦

ثانيًا: أوجد التوقع والانحراف المعيارى للتوزيع الاحتمالى لكل مما يأتى:

(٤)

س$_ر$	٢	٣	٩
د(س$_ر$)	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٦}$

(٥)

س$_ر$	−٥	−٤	١	٢
د(س$_ر$)	$\frac{١}{٢٤}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٥}{١٢}$	$\frac{١}{٦}$

(٦)

س$_ر$	−٣	−١	٠	١	٢	٣
د(س$_ر$)	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{١٢}$

ثالثًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(٧) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا توزيعه الاحتمالى مبينًا بالجدول الآتى:

س$_ر$	١	٢	٤	٦
د(س$_ر$)	٠,٢	٠,٣	أ	٠,١

أولًا: أوجد قيمة أ ثانيًا: أوجد المتوسط والانحراف المعيارى

(٨) إذا كان مدى المتغير العشوائى س هو {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}،
ل(س = ١) = $\frac{٤}{٢٥}$ ، ل(س = ٢) = $\frac{٧}{٢٥}$ ، ل(س = ٤) = $\frac{١}{٥}$ فاحسب توقع وتباين س.

(٩) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}، ل(س = ٠) = ل(س = ٤) = $\frac{١}{١٦}$ ،
ل(س = ١) = ل(س = ٣) = $\frac{١}{٤}$ أوجد: أولًا: ل (س: ٢) ثانيًا: المتوسط والتباين للمتغير س.

(١٠) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا دالة توزيعه الاحتمالى مبينًا بالجدول الآتى ، حيث ٠ < ح < ١

س$_ر$	−٣	صفر	٣	٦
د(س$_ر$)	ح	ح^٢	٢ح^٢	ح

فأوجد: أ قيمة ح

ب التوزيع الاحتمالى للمتغير سـ. ج المتوسط والتباين للمتغير سـ.

(١١) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا توزيعه الاحتمالى مبينًا بالجدول الآتى:

سر	١	٢	٤	أ
د(سر)	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,١

احسب قيمة أ إذا كان التوقع μ = ٣ ثم أوجد الانحراف المعيارى للمتغير العشوائى سـ.

(١٢) إذا كان التوزيع الاحتمالى لمتغير عشوائى متقطع سـ يحدد بالدالة د حيث: د(س) = $\frac{\text{أ س}}{٩}$ ، حيث س = ١، ٢، ٣

أوجد: أ قيمة أ ب احسب التوقع والتباين للمتغير سـ.

(١٣) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا وتوزيعه الاحتمالى يحدد بالدالة: د(س) = $\frac{\text{س}^٢ + ١}{\text{أ}}$ حيث س = ٠، ١ ، ٢ ، ٣

أوجد: أ قيمة أ ب احسب معامل الاختلاف للمتغير سـ.

(١٤) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا توزيعه الاحتمالى يحدد بالدالة: د(س) = $\frac{\text{س} + ٤}{١٦}$ حيث س = - ٢، م، ١، ٢

فأوجد: أ قيمة م ب المتوسط والتباين للمتغير سـ.

(١٥) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا توزيعه الاحتمالى يحدد بالدالة د حيث:

د(س) = $\frac{\text{أ}}{\text{س} + ٣}$ ، س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣

أ أوجد قيمة أ ب أوجد التوقع والتباين.

(١٦) إذا كان مدى المتغير العشوائى سـ هو {-١ ، ٠ ، ٢} وكان ل(سـ = -١) = $\frac{١}{٤}$ وكان التوقع يساوى ١ فأوجد:

أ ل(سـ = ٠) ، ل (سـ = ٢) ب أوجد معامل الاختلاف.

(١٧) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متوسطه μ = ٣ وتوزيعه الاحتمالى كالآتى:

سر	٠	٢	ك	٤
د(سر)	١	أ٢	$\frac{١}{٤}$	أ٥

أ احسب قيمة أ ، ك

ب أوجد الانحراف المعيارى للمتغير سـ.

٣ - ٣ دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائى المتصل

Probability Density Function Of Random Variable

سوف تتعلم

- دالة الكثافة الاحتمالية

المصطلحات الأساسية

- كثافة احتمالية *Probability Density*

المتغير العشوائى المستمر أو المتصل *Continuous Random Variable*

تعريف المتغير العشوائى المستمر (المتصل): مداه فترة من الأعداد الحقيقية (مغلقة أو مفتوحة)، أى إنها مجموعة غير قابلة للحصر من الأعداد الحقيقية.

ومن أمثلة ذلك:

- أجر عامل بالدولة تم اختياره عشوائيًّا.
- درجة الحرارة المتوقعة خلال أحد الأيام.
- طول احد المرشحين لفريق كرة السلة.

مثال المتغير العشوائى المستمر

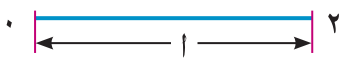
٦ النقطة (س ، ص) تقع داخل أو على الدائرة $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 4$ التى مركزها نقطة الأصل (و) ونصف قطرها ٢ وحدة طول والمطلوب إيجاد مدى المتغير العشوائى سـ الذى يعبر عن بعد النقطة عن مركز الدائرة .

الحل

∵ ف = { (س ، ص): $\text{س}^2 + \text{ص}^2 \leqslant 4$ }

∴ ٠ ⩽ أ ⩽ ٢ حيث أ بعد النقطة (س ، ص) عن مركز الدائرة.

∴ مدى المتغير العشوائى سـ = [٠ ، ٢]



نلاحظ أن كل نقطة فى هذه الفترة هى قيمة ممكنة للمتغير العشوائى سـ كما هو موضح بالشكل

حاول أن تحل

١ إذا كان أقصى عُمر افتراضى لأحد أنواع الهواتف المحمولة «سـ» يقدر بـ ١٨ ساعة تشغيل. فاكتب مدى سـ.

حاول أن تحل

٢ بين أيًّا مما يأتى يدل على متغير عشوائي متقطع وأيها يدل على متغير عشوائى متصل.

أ عدد أرغفة الخبز التى أنتجها مخبز خلال ساعة.

ب الوقت الذى يستغرقه كريم فى انتظار صديقه زياد.

جـ عدد الأهداف التى سجلها الفريق الفائز فى مباريات كرة اليد.

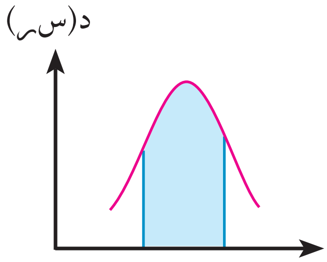
د عدد المخالفات المرورية المسجلة على طريق مصر - إسكندرية الصحراوى خلال يوم.

هـ الوقت الذى يستغرقه المعلم فى شرح درس المتغير العشوائى.

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية. برامج رسومية للحاسب.

دالة الكثافة الاحتمالية : *Probability Density Function*



لأي متغير عشوائي متصل (مستمر) س توجد دالة حقيقيةمداها غير سالب يرمز لها بالرمز د(س) تسمى دالة الكثافة الاحتمالية يمكن من خلالها إيجاد احتمالات الأحداث المعبرة عنها بواسطة المتغير العشوائي من خلال المساحة المحصورة أسفل منحنى الدالة وأعلى محور السينات ويتم حساب ل(أ < س < ب) بحساب مساحة الجزء المظلل من منحنى الدالة د بين القيمتين أ ، ب كما في الشكل المقابل.

وتحقق هذه الدالة الشروط الآتية :

- د(س) ≥ ٠ لجميع قيم س التي تنتمي لمجال الدالة.
- مساحة المنطقة الواقعة أسفل منحنى الدالة د وأعلى محور السينات تساوى الواحد الصحيح.

مثال

(١) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٦}(٢س - ١) & ،\ ١ \leq س \leq ٣ \\ صفر & ،\ فيما\ عدا\ ذلك \end{cases}$$

أ **أثبت أن** : ل (١ < س < ٣) = ١

ب **أوجد** : ل (س ≤ ٢)، ل (س < ٢,٥)، ل (٢ ≤ س ≤ ٢,٥).

الحل

تذكر أن

مساحة المستطيل = الطول × العرض

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع

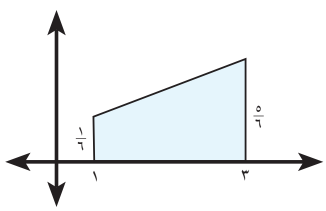
مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ مجموع القاعدتين المتوازيتين × الارتفاع

$د(١) = \frac{١}{٦} \times (٢ - ١) = \frac{١}{٦}$

$د(٣) = \frac{١}{٦} \times (٦ - ١) = \frac{٥}{٦}$

$د(٢) = \frac{١}{٦} \times (٤ - ١) = \frac{٣}{٦}$

$د(٢,٥) = \frac{١}{٦} \times (٥ - ١) = \frac{٤}{٦}$



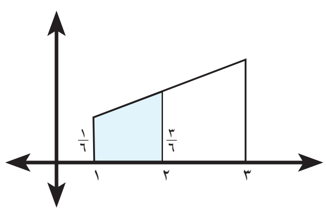
أ $ل(١ \leq س \leq ٣) = \frac{١}{٢}\left(\frac{١}{٦} + \frac{٥}{٦}\right) \times ٢$

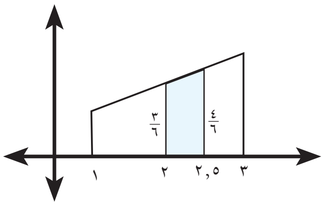
$= \frac{١}{٢} \times \frac{٦}{٦} \times ٢ = ١$

ب $ل(س < ٢) = ل(١ \leq س \leq ٢)$

$= \frac{١}{٢}\left(\frac{١}{٦} + \frac{٣}{٦}\right) \times ١$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٦} = \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣}$

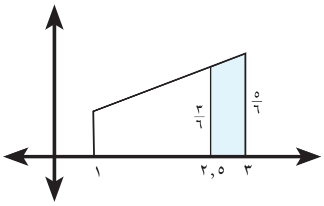




، $\text{ل}(\text{س} > ٢,٥) = \text{ل}(٢,٥ < \text{س} \le ٣)$

$= \frac{١}{٢}\left(\frac{٤}{٦} + \frac{٥}{٦}\right) \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٩}{٦} \times \frac{١}{٢} = \frac{٩}{٢٤} = \frac{٣}{٨}$



، $\text{ل}(٢ \le \text{س} \le ٢,٥) = \frac{١}{٢}\left(\frac{٣}{٦} + \frac{٤}{٦}\right) \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٧}{٦} \times \frac{١}{٢} = \frac{٧}{٢٤}$

لاحظ أن : $\text{ل}(٢ \le \text{س} \le ٢,٥) = ١ - [\text{ل}(\text{س} \le ٢) + \text{ل}(\text{س} \ge ٢,٥)]$

$= ١ - \left(\frac{١}{٣} + \frac{٣}{٨}\right) = ١ - \frac{١٧}{٢٤} = \frac{٧}{٢٤}$

حاول أن تحل

٣ إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متصلًا حيث :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{١}{٥٠}(١٧ - ٢\text{س}) & \text{حيث } ١ < \text{س} < ٦ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أ **أثبت أن** د(س) دالة كثافة للمتغير العشوائي س .

ب **أوجد** $\text{ل}(\text{س} > ٣)$

ج **أوجد** $\text{ل}(٤ < \text{س} < ٧)$

مثال

٢ إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متصلًا دالة كثافة الاحتمال له هو :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{٢\text{س} + \text{ك}}{٢٤} & \text{حيث } ١ < \text{س} < ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أ أوجد قيمة ك.

ب أوجد $\text{ل}(\text{س} > ٣)$

الحل

$\because \text{ل}(١ < \text{س} < ٤) = ١$

$\therefore \frac{١}{٢}\left(\frac{٢ + \text{ك}}{٢٤} + \frac{٨ + \text{ك}}{٢٤}\right) \times ٣ = ١$

$\therefore \frac{١}{٢} \times ٣ \times \frac{١٠ + ٢\text{ك}}{٢٤} = ١$

$\therefore \text{ك} = ٣$

، $\text{د}(٣) = \frac{٦ + ٣}{٢٤} = \frac{٩}{٢٤}$ ، $\text{د}(٤) = \frac{٨ + ٣}{٢٤} = \frac{١١}{٢٤}$

$\therefore \text{ل}(\text{س} > ٣) = \frac{١}{٦}\left(\frac{٩}{٢٤} + \frac{١١}{٢٤}\right) \times ١ = \frac{١}{٦} \times \frac{٢٠}{٢٤} = \frac{٥}{١٢}$

حاول أن تحل

٤ إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متصلًا دالة كثافة الاحتمال له هو :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{٢\text{س} + ١}{٢٨} & ١ < \text{س} < ٥ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أ) أوجد قيمة أ إذا كان ل (سـ > أ) = $\frac{١}{٧}$ ب) أوجد قيمة ب إذا كان ل (ب > سـ > ب + ٢) = $\frac{١}{٢}$

تمـــارين (٣ - ٣)

أولًا : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) إذا كان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ هو :

د(س) = { $\frac{١}{٢}$ حيث ٢ > س > ٤ ؛ صفر فيما عدا ذلك }   فإن ل (سـ > ٣) =

أ) $\frac{١}{٤}$ ب) $\frac{١}{٢}$ جـ) $\frac{٣}{٤}$ د) ١

٢) إذا كان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ هو :

د(س) = { ك س حيث ٢ > س > ٤ ؛ صفر فيما عدا ذلك }   فإن ك =

أ) $\frac{١}{٦}$ ب) $\frac{١}{٣}$ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) $\frac{٣}{٤}$

٣) إذا كان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ هو:

د(س) = { $\frac{١}{٦}$ حيث -٣ > س > ٣ ؛ صفر فيما عدا ذلك }   فإن ل (سـ = ٣) =

أ) صفر   ب) $\frac{١}{٦}$ جـ) $\frac{١}{٣}$ د) $\frac{١}{٢}$

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الاتية :

٤) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلًا حيث:

د(س) = { $\frac{س + ٣}{١٨}$ حيث -٣ > س > ٣ ؛ صفر فيما عدا ذلك }

أوجد : أولاً: ل (سـ > ٠)   ثانيًا : ل (-١ > سـ > ٢)

٥) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هى :

د(س) = { $\frac{٢س + ١}{٢٤}$ حيث ٢ > س > ٥ ؛ صفر فيما عدا ذلك }

أوجد : أولا : ل (٣ >سـ> ٥)   ثانيًا : ل (سـ < ٤)

٦) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا حيث :

د(س) = { $\frac{٢ (س + ١)}{٢٧}$ حيث ٢ > س > ٥ ؛ صفر فيما عدا ذلك }

أولا : أثبت أن د(س) دالة كثافة للمتغير العشوائى سـ.   ثانيًا : أوجد ل (سـ < ٣)

⑦ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هى :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{٢س + ١}{١٨} & \text{حيث } ١ < س < ٤ \\ صفر & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد : **أولا** : ل (سـ < ٣)　　**ثانيًا** : ل (٢ < سـ < ٤)

⑧ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هى :

$$د(س) = \begin{cases} أ س & \text{حيث } ٠ < س < ٤ \\ صفر & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد : **أولا** : قيمة أ　　**ثانيًا** : ل (١ < سـ < ٣)

⑨ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هى :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٨} س + أ & \text{حيث } ٠ < س < ٤ \\ صفر & \text{، فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد : **أولا** : قيمة أ　　**ثانيًا** : ل (١ < سـ < ٣)

⑩ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هى :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{أ س}{٢} & \text{حيث } ٠ < س < ٤ \\ صفر & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد : **أولا** : قيمة أ　　**ثانيًا** : ل (١ < سـ < ٣)

⑪ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هى :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س - ١}{ك} & \text{حيث } ١ < س < ٥ \\ صفر & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد : **أولا** : قيمة ك　　**ثانيًا** : ل (٢ < سـ < ٣)

تفكير ابداعى :

⑫ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هى :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س}{٦} & \text{حيث } ٠ < س < ٢ \\ \frac{١}{٣} & \text{حيث } ٢ < س < ٤ \\ صفر & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

فاحسب: أ ل (١ < س < ٢)　　ب قيمة أ التى تجعل ل (٢ < سـ < أ) = ٠,٥

⑬ إذا كان سـ متغيرا عشوائيا متصلا، دالة كثافة الاحتمال له هى:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{٣س + ١}{٤٠} & \text{حيث } ١ \leqslant س \leqslant ٥ \\ صفر & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

وكان أ، ب ∈]١، ٥[اوجد

أ قيمة أ اذا كان ل (أ < سـ < أ + ٢) = $\frac{٧}{٢٠}$　　ب قيمة ب اذا كان ل (سـ < ب) = $\frac{٦٩}{٨٠}$

ملخص الوحدة

١ المتغير العشوائى هو:

دالة مجالها مجموعة عناصر فضاء العينة ف ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

٢ المتغير العشوائى المتقطع (المنفصل أو الوثاب):

مداه مجموعة محدودة (منتهية) أى قابلة للحصر من الأعداد الحقيقية.

٣ المتغير العشوائى المستمر (المتصل):

مداه فترة من الأعداد الحقيقية (مغلقة أو مفتوحة)، أى إنها مجموعة غير قابلة للحصر من الأعداد الحقيقية.

٤ دالة التوزيعات الاحتمالية المتقطعة :

إذا كان $س$ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه المجموعة: $\{س_١، س_٢، س_٣، \ldots\ldots، س_ر\}$ فإن الدالة د المعرفة كالآتى:

$د(س_ر) = ل\,(س = س_ر)$ لكل $ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، \ldots\ldots$

تحدد ما يسمى بدالة التوزيعات الاحتمالية المتقطعة للمتغير العشوائى $س$ والذى يعبر عنه بمجموعة الأزواج المرتبة المحددة لبيان الدالة د .

أى أن التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى $س = \{(س_١ ، د(س_١)) ، (س_٢ ، د(س_٢)) ، (س_٣ ، د(س_٣)) ، \ldots\ldots ، (س_ن ، د(س_ن))\}$

٥ التوقع (المتوسط):

التوقع هو القيمة التى تتمركز عندها معظم قيم المتغير العشوائى ويسمى أحيانًا « المتوسط » ويرمز له بالرمز (μ) ويقرأ (ميو).

فإذا كان $س$ متغير عشوائيًّا متقطعًا دالة التوزيع الاحتمالى له هى د ومداه هو: $\{س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، \ldots\ldots ، س_ن\}$ باحتمالات $د(س_١) ، د(س_٢) ، د(س_٣) ، \ldots\ldots ، د(س_ن)$ على الترتيب فإن التوقع يعطى بالعلاقة:

$$\boxed{\text{التوقع } (\mu) = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر \times د(س_ر)}$$

أى أن: التوقع $(\mu) = س_١ \times د(س_١) + س_٢ \times د(س_٢) + س_٣ \times د(س_٣) + \ldots\ldots + س_ن \times د(س_ن)$

٦ التباين:

التباين لمتغير عشوائى متقطع $س$ يقيس مقدار التشتت للمتغير العشوائى عن قيمته المتوقعة، ويرمز له بالرمز ($\sigma^٢$) ويقرأ (سيجما تربيع) ويعطى بالعلاقة:

$$\boxed{\sigma^٢ = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر^٢ \times د(س_ر) - \mu^٢}$$

الانحراف المعيارى للمتغير العشوائى $س$ هو الجذر التربيعى للتباين ويرمز له بالرمز σ ، ويلاحظ أن التباين والانحراف المعيارى كميات موجبة دائمًا.

٧ معامل الاختلاف:

يعرف معامل الاختلاف لأى مجموعة من المفردات بأنه النسبة المئوية بين الانحراف المعيارى للمجموعة والتوقع (المتوسط) لها ويتحدد كما فى العلاقة الآتية:

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{المتوسط}} \times ١٠٠\ \% = \frac{\sigma}{\mu} \times ١٠٠\%$$

وهذا المعامل يصور تشتت المجموعة فى صورة نسبة مئوية مجردة من التمييز بحيث لا تتأثر بالوحدات المقيسة بها الظاهرة.

٨ دالة الكثافة الاحتمالية :

لأى متغير عشوائى متصل (مستمر) سـ توجد دالة حقيقية غير سالبة يرمز لها بالرمز د(س) تسمى دالة الكثافة الاحتمالية يمكن من خلالها إيجاد احتمالات الأحداث المعبرة عنها بواسطة المتغير العشوائى من خلال المساحة المحصورة أسفل منحنى الدالة وأعلى محور السينات ويتم حساب ل(أ < سـ < ب) بحساب مساحة الجزء المظلل من منحنى الدالة د بين القيمتين أ ، ب.

وتحقق هذه الدالة الشروط الآتية :

- د(سـ) ⩾ ٠ لجميع قيم س التي تنتمى لمجال الدالة د.
- مساحة المنطقة الواقعة أسفل منحنى الدالة د وأعلى محور السينات تساوى الواحد الصحيح.

تمارين عامة

أولًا : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الآتية :

(١) القيمة المتوقعة للتوزيع الاحتمالى التالى هى :

$س_ر$	صفر	١	٢
د($س_ر$)	٠,٢	٠,٣	٠,٥

(أ) ١ (ب) ١,١٤ (ج) ١,٣ (د) ١,٥

(٢) إذا كان التوقع فى التوزيع الاحتمالى التالى :

$س_ر$	١	٢	ك
د($س_ر$)	٠,١	٠,٨	٠,١

يساوى ٢ فإن قيمة ك تساوى

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٦

(٣) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هى :

د(س) = { ك حيث -٤ < س < ٤ ، صفر فيما عدا ذلك }   فإن ك =

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (ج) صفر (د) ٤

ثانيًا : اجب عن الأسئلة الآتية

(٤) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه = {-٣ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٣} وكانت قيم ل (س = -٣) = ل (س = ٣) = $\frac{١}{٩}$ ، ل (س = ٠) = $\frac{٤}{٩}$ ، ل (س = -١) = ل (س = ١) فأوجد دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى.

(٥) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا و دالة توزيعه الاحتمالى يتحدد بالدالة د(س) = $\frac{س + ٤}{١٦}$ حيث س = -٢ ، م ، ١ ، ٢ أوجد قيمة الثابت م، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير س

(٦) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا توزيعه الاحتمالى يتحدد بالدالة د(س) = $\frac{أ س^٢}{٢}$ حيث س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ فأوجد قيمة أ ثم أوجد ل (س ≥ ٢).

(٧) فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى فى كل مرة ، أوجد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى الذى يعبر عن أكبر العددين الظاهرين على الوجهين العلويين.

٨ صمم حجر نرد بحيث يحمل وجهان منه الرقم ١ ، ووجهان الرقم ٣ ، ووجهان الرقم ٥ ، ألقى هذا الحجر مرتين متتاليتين وملاحظة الرقم الذى يظهر على الوجه العلوى فى كل مرة ، فإذا كان المتغير العشوائى س يعبر عن « الفرق المطلق بين الرقمين الظاهرين ».

أوجد : أولا : التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س.

ثانيًا : احتمال أن يكون الفرق المطلق بين الرقمين أقل من ٤ .

٩ حجرا نرد منتظمان، الأول كتب على كل وجهين متقابلين أحد الأعداد {١، ٣، ٥} والثانى كتب على كل وجهين متقابلين أحد الأعداد {٢ ، ٤ ، ٦} فإذا ألقي الحجران وكان المتغير العشوائي س يعبر عن مجموع العددين فأوجد دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير س واحسب المتوسط والانحراف المعيارى للمتغير س.

١٠ صندوقان أ ، ب بكل منهما أربع كرات مرقمة من ١ إلى ٤ ، سحبت كرة عشوائيًّا من كل صندوق ، فإذا كان المتغير العشوائى « مجموع العددين على الكرتين المسحوبتين » فأوجد دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير س واحسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى.

١١ إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متوسطه μ = ٢ وتوزيعه الاحتمالى كالآتى :

سر	١	٠	٢	أ
د(سر)	$\frac{١}{١٢}$	ب	$\frac{١}{٣}$	$\frac{٥}{١٢}$

أولا : احسب قيمتى أ ، ب

ثانيًا : احسب الانحراف المعيارى

١٢ إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هى :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س + ٢}{١٦} & \text{حيث } ٠ < س < ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد : أولا : ل (س < ٢)

ثانيًا : ل (١ < س < ٤)

١٣ إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هى :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س + ١}{٨} & \text{حيث } أ < س < أ + ٢ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد : أولا : قيمة أ

ثانيًا : ل (س < ٣)

لمزيد من الأنشطه والتدريبات زيارة الموقع الالكترونى www.sec3mathematics.com.eg

اختبار تراكمي

(١) فى لعبة القرص ذى المؤشر الدوار قسم القرص إلى ١٦ قطاعًا متطابقا ومرقما بالأعداد من ١ إلى ١٦، ما احتمال استقرار المؤشر على عدد فردى إذا علم أنه استقر على عدد أكبر من ٥؟

(٢) **الربط بالطرق** : الجدول التالى يبين التوزيع الاحتمالى لعدد الحوادث المتوقعة خلال أحد الأيام الممطرة على الطرق.

عدد الحوادث	صفر	١	٢	٣	٤	٥	٦
الاحتمال	٠,١	٠,٢٦	٠,٣١	٠,١٤	٠,١١	٠,٠٦	٠,٠٢

احسب القيمة المتوقعة لعدد هذه الحوادث.

(٣) **الربط بالإعلام** : سجلت إحدى المواقع الإلكترونية مسحًا لبرامج التلفاز التى يشاهدها المشاهدون بشكل رئيسى فكانت كما فى الجدول الآتى :

نوع البرامج	ثقافية	اجتماعية	إخبارية	رياضية	ترفيهية	أخرى
احتمال وقوعها	٠,١٤	٠,٢	٠,٢٤	٠,١٨	٠,١٦	٠,٠٨

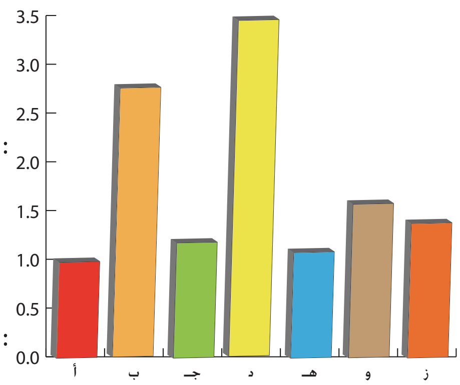
أ مثل هذه البيانات بالأعمدة

ب أثبت أن هذه البيانات تمثل توزيعًا احتماليًّا

جـ إذا اختير أحد المشاهدين لهذه البرامج عشوائيًّا فأوجد احتمال أن تكون مشاهدته للبرامج الاجتماعية أو الرياضية.

د اكتب بحثًا عن أثر الإعلام فى تكوين ثقافة المجتمع.

(٤) **الربط بالرياضة** : اشترك ٧ متسابقين فى سباق المسافات القصيرة فكان احتمال الفوز بهذا السباق كما فى التمثيل البيانى الآتى



أ بين أن هذه التوزيعات تمثل توزيعًا احتماليًّا.

ب أوجد احتمال أن يفوز ب ، أ ، هـ فى هذا السباق.

(٥) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هى

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س + ١}{١٢} & \text{حيث } ٠ < س < ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد : **أولا** : ل (سـ > ٢) **ثانيًا** : ل (٢ < سـ < ٥)

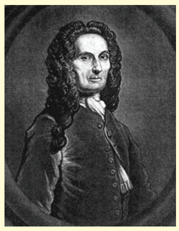
التوزيع الطبيعى

Normal Distribution

الوحدة ٤

مقدمة الوحدة

يعد التوزيع الطبيعى من أهم التوزيعات الاحتمالية التى تدرس فى مقررات الإحصاء نظرًا لاستخداماتها المختلفة لنواتج بعض العمليات فى العلوم الطبيعية والاجتماعية والاقتصادية حيث يتعامل مع معظم الظواهر فى حياتنا اليومية، وكان أول من استخدم التوزيع الطبيعى العالم الفرنسى إبراهام دى موافر (Abraham de Moivre) عام ١٧٥٦ م فى إحدى مطبوعاته، كما شارك فى تطويره عدد من العلماء من أشهرهم العالم الألمانى كارل فريدك جاوس (Carl Friedrich Gauss) (١٧٧٧ م – ١٨٥٥ م) والذى يسمى التوزيع الطبيعى أحيانًا باسمه (منحنى جاوس أو منحنى الجرس).



إبراهام دى موافر

كارل فريدك جاوس

ومن أشهر تطبيقات التوزيع الطبيعى التقييم الإدارى للمرؤوسين وذلك لضمان قدر من العدالة، كما يستخدم فى دراسة البواقى لتحليل الانحدار، كما أن له علاقة وطيدة فى خرائط الضبط (Control Charts) وغيرها.

أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف التوزيع الطبيعى الاعتدالى وخواصه.
- يحسب احتمال المتغير المعيارى .
- يحسب احتمال المتغير الطبيعى غير المعيارى .
- يتعرف المتغير العشوائى الطبيعى المعيارى، والشكل العام للمنحنى الممثل لدالة الكثافة لهذا المتغير .
- يحول أى متغير عشوائى طبيعى إلى متغير طبيعى معيارى .
- يوجد قيم احتمالات متغير عشوائى له توزيع طبيعى معيارى باستخدام الجداول الإحصائية .
- يصف خواص منحنى التوزيع الطبيعى، وبعض الظواهر التى يعبر عنها.
- يفسر نتائج حصل عليها من حساب الاحتمال لمتغير عشوائى طبيعى .

المصطلحات الأساسية

- التوزيع الطبيعي *Normal Distribution*
- المنحنى الطبيعي *the Normal Curve*
- المتغير العشوائي الطبيعي *Normal Random Variable*
- التوزيع الطبيعي المعياري *Standard normal distribution*

دروس الوحدة

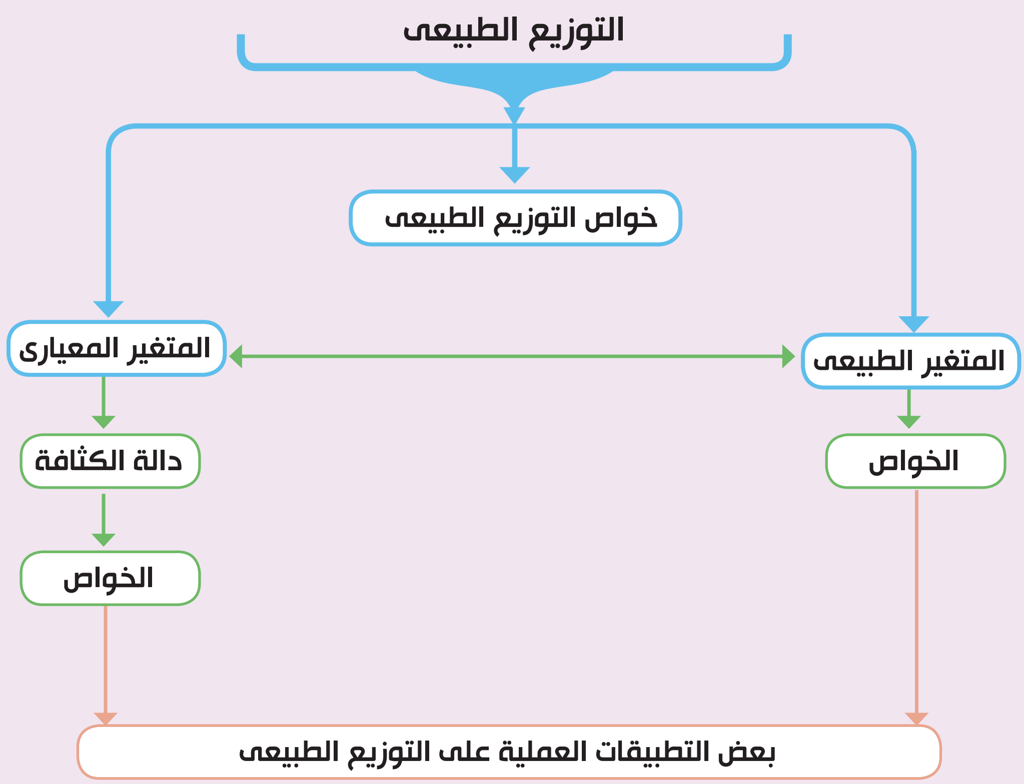
الدرس (٤ - ١): التوزيع الطبيعي.

الدرس (٤ - ٢): بعض التطبيقات العملية على التوزيع الطبيعي.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية

مخطط تنظيمي للوحدة



الوحدة الرابعة

٤ - ١

التوزيع الطبيعى

Normal Distribution

سوف تتعلم

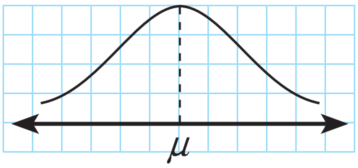
- المتغير العشوائى الطبيعى
- بعض خواص المنحنى الطبيعى
- التوزيع الطبيعى المعيارى
- خواص دالة الكثافة للتوزيع الطبيعى المعيارى
- حساب الاحتمال للمتغير الطبيعى المعيارى.

المصطلحات الأساسية

- التوزيع الطبيعى Normal Distribution
- المنحنى الطبيعى Normal Curve
- المتغير العشوائى الطبيعى Normal Random Variable
- التوزيع الطبيعى المعيارى Standard normal distribution

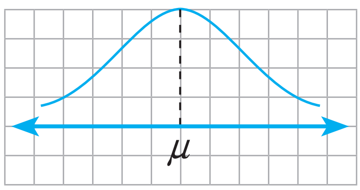
مقدمة:

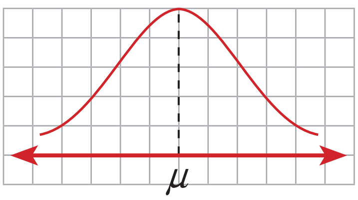
يعد التوزيع الطبيعى من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة لما له من خواص نظرية هامة ، كما يمكن لنواتجه أن تأخذ أى قيمة فى فترة من الأعداد الحقيقية ومثال ذلك أطوال البالغين وأوزان الأطفال عند الولادة ودرجة الذكاء عند الإنسان .... إلخ و يوصف التوزيع الطبيعى بمعادلة رياضية تحدد منحناه وهى تتعين تعيينًا تامًّا بمعرفة التوقع (المتوسط) μ والانحراف المعيارى σ و يشبه هذا المنحنى شكل الجرس وهو متماثل حول المستقيم س = μ و يتقارب طرفاه من المحور الأفقى حيث يمتد طرفاه إلى مالا نهاية كما هو موضح بالشكل المقابل.



المتغير العشوائى الطبيعى: *Normal Random Variable*

يقال للمتغير العشوائى المتصل س إنه "متغير عشوائى طبيعى " إذا كان مداه يتحدد بالفترة] - ∞ ، ∞ [ودالة الكثافة الاحتمالية له تمثل بمنحنى يتخذ دائمًا شكل الناقوس (الجرس) و يسمى منحنى دالة الكثافة بالمنحنى الطبيعى أو "منحنى جاوس " و يتحدد شكل المنحنى الطبيعى بمعرفة قيمتين أساسيتين هما : المتوسط μ والانحراف المعيارى σ للمتغير العشوائى س كما هو موضح بالأشكال التالية .





بعض خواص المنحنى الطبيعى *Some Properties of the Normal Curve*

(١) له قمة واحدة وطرفاه يمتدان إلى - ∞ ، ∞ .

(٢) له محور تماثل يمر بالقمة و يقطع المحور الأفقى عند س = μ .

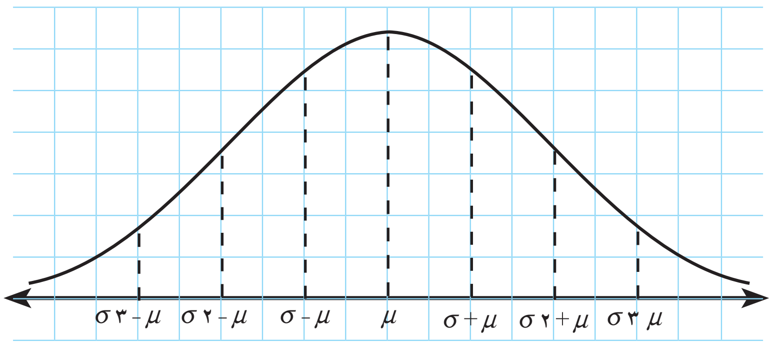
(٣) مساحة المنطقة الواقعة أسفل المنحنى الطبيعى وفوق محور السينات تساوى الواحد الصحيح .

(٤) من التماثل نجد أن المستقيم س = μ يقسم المساحة الواقعة تحت المنحنى وفوق محور السينات إلى منطقتين مساحة كل منهما = ٠,٥ .

الأدوات المستخدمة آلة حاسبة علمية.

(٥) يمكن حساب المساحة التقريبية للمنطقة أسفل المنحنى وأعلى محورالسينات تبعًا للفترات الآتية :

- من μ - σ إلى μ + σ = ٦٨,٢٦ ٪ من المساحة الكلية .
- من μ - ٢σ إلى μ + ٢σ = ٩٥,٤٤ ٪ من المساحة الكلية .
- من μ - ٣σ إلى μ + ٣σ = ٩٩,٧٤ ٪ من المساحة الكلية .



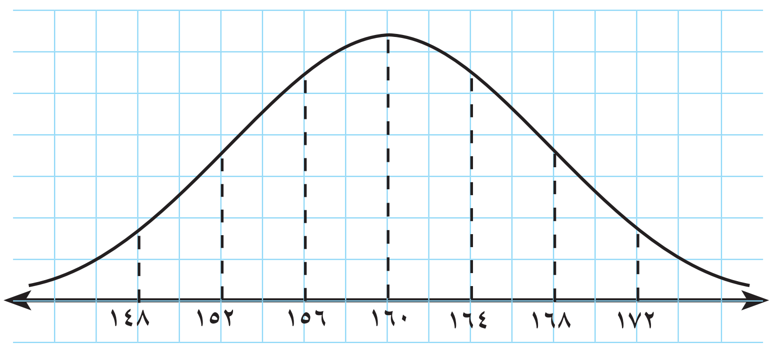
لاحظ أن : يجب أن يكون عدد البيانات كبيرًا حتى يكون التوزيع الطبيعى تقريبيًّا .

مثال

(١) إذا كان أطوال طلاب إحدى المدارس يتبع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط ١٦٠ سم ، انحراف معيارى ٤ سم .اختير أحد الطلاب عشوائيًّا أوجد احتمال أن يكون :

أ أكبر من ١٧٢ سم　　ب أقل من ١٥٦ سم　　ج محصور بين ١٥٦ سم ، ١٦٨ سم

الحل



من المعطيات نجد أن : المتوسط μ = ١٦٠ ، الانحراف المعيارى σ = ٤

بمقارنة البيانات مع منحنى التوزيع الطبيعى نجد أن: μ + ٣ س = ١٦٠ + ٣ × ٤ لذلك فإن

أ ل(س > ١٧٢) = ل(س > μ + ٣σ)

∵ المساحة من μ - ٣σ إلى μ + ٣σ = ٠,٩٩٧٤

∴ المساحة من μ إلى μ + ٣σ = ٠,٩٩٧٤ ÷ ٢ = ٠,٤٩٨٧

∴ المساحة على يمين μ + ٣σ = ٠,٥ - ٠,٤٩٨٧ = ٠,٠٠١٣

ب ل(س < ١٥٦) = ل(س < μ - σ)

∵ المساحة من μ - σ إلى μ + σ = ٠,٦٨٢٦ ∴ المساحة من μ إلى μ - σ = ٠,٦٨٢٦ ÷ ٢ = ٠,٣٤١٣

∴ المساحة على يسار μ - σ = ٠,٥ - ٠,٣٤١٣ = ٠,١٥٨٧

جـ ل(١٥٦ < س < ١٦٨) = ل(μ - σ < س < μ + ٢σ)

= ل(μ - σ < س < μ) + ل(μ < س < μ + ٢σ)

= $\frac{٠,٦٨١٦}{٢}$ + $\frac{٠,٩٥٤٤}{٢}$ = ٠,٣٤٠٨ + ٠,٤٧٧٢ = ٠,٨١٨

٩ حاول أن تحل

(١) إذا كان أوزان الطلاب فى إحدى الكليات تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه μ = ٦٨ كجم وتباينه ١٦ كجم^{٢} فأوجد:

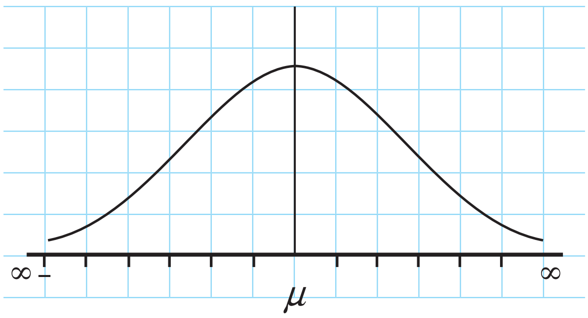
أ احتمال أن يكون الوزن أكبر من ٧٢ كجم

ب النسبة المئوية للطلاب الذين تقع أوزانهم بين ٦٤ كجم ، ٧٢ كجم "وزن كل منهم"

جـ عدد الطلاب الذين يزيد وزنهم عن ٦٤ كجم إذا كان عدد طلاب الكلية ٢٠٠٠ طالب.

التوزيع الطبيعى المعيارى *Standard normal distribution*

لاحظنا فى التوزيع الطبيعى أنه عند إيجاد الاحتمال تكون أطوال الفترات من مضاعفات الانحراف المعيارى حتى يمكن حساب الاحتمال ، لذلك كان من المناسب تحويل التوزيعات الطبيعية إلى توزيعات طبيعية معيارية وذلك بتحويل قيم (س) إلى قيم معيارية (ص) وذلك بمعلومية المتوسط (μ) والانحراف المعيارى (σ) ، عندها يكون: μ = ٠ ، σ = ١

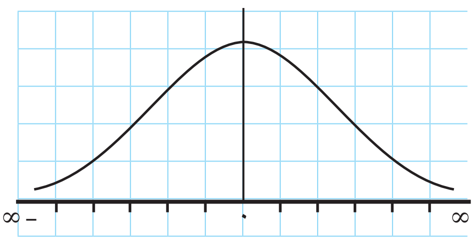


تعريف

إذا كان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س هو التوزيع الطبيعى بمتوسط μ وانحراف معيارى σ

فإن : ص = $\frac{س - \mu}{\sigma}$ هو توزيع طبيعى معيارى. متوسطة μ = صفر وانحرافه المعيارى σ = ١

بعض خواص دالة الكثافة للتوزيع الطبيعى المعيارى (ص):



(١) المنحنى يقع أعلى المحور الأفقى (محور السينات).

(٢) متماثل بالنسبة للمحور الرأسى (محور الصادات).

(٣) طرفا المنحنى يمتدان إلى ما لا نهاية دون أن يلتقيا بالمحور الأفقى.

(٤) مساحة المنطقة أسفل المنحنى وفوق المحور الأفقى = ١

(٥) من التماثل نجد أن المحور الرأسى يقسم المساحة الواقعة تحت المنحنى وفوق المحور الأفقى إلى منطقتين مساحة كل منها = ٠,٥

(٦) يمكن حساب المساحة التقريبية للمنطقة أسفل المنحنى المعيارى فقط وفوق أى فترة] أ ، ب [بواسطة جداول خاصة.

جدول المساحة أسفل منحنى التوزيع الطبيعى المعيارى :

Table of the area under the standard normal distribution curve

لتحويل التوزيع الطبيعى س إلى توزيع طبيعى معيارى ص نستخدم العلاقة :

ص = $\frac{س - \mu}{\sigma}$ ومن جدول التوزيع الطبيعى المعيارى المرفق فى نهاية الكتاب يمكن إيجاد المساحة المطلوبة .

وفيما يلى نوضح كيفية الكشف فى جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعى المعيارى .

ى	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠						٠,٠١٩٩				
٠,١										
٠,٢										
٠,٣										
٠,٤	٠,١٥٥٤									
٠,٥										
٠,٦				٠,٢٣٥٧						
٢,٥								٠,٤٩٤٩		
٣,٥										

ل (٠ ⩽ ص ⩽ ٠,٠٥) = المساحة تحت المنحنى الطبيعى المعيارى فوق الفترة [٠ ، ٠,٠٥] أى أن ى = ٠,٠٥ ، لذلك نبحث فى الجدول بالصف ٠,٠٠ وتحت العمود ٠,٠٥ فنجد العدد هو ٠,٠١٩٩

∴ ل (٠ ⩽ ص ⩽ ٠,٠٥) = ٠,٠١٩٩

ل (٠ ⩽ ص ⩽ ٠,٤) = المساحة تحت المنحنى الطبيعى المعيارى فوق الفترة [٠ ، ٠,٤] أى أن ى = ٠,٤ ، لذلك نبحث فى الجدول بالصف أمام ٠,٤ وتحت العمود ٠,٠٠ فنجد العدد ٠,١٥٥٤

∴ ل (٠ ⩽ ص ⩽ ٠,٤) = ٠,١٥٥٤

ل (٠ ⩽ ص ⩽ ٠,٦٣) = المساحة تحت المنحنى الطبيعى المعيارى فوق الفترة [٠ ، ٠,٦٣] أى أن ى = ٠,٦٣ ، لذلك نبحث فى الجدول بالصف أمام ٠,٦ وتحت العمود ٠,٠٣ فنجد العدد ٠,٢٣٥٧

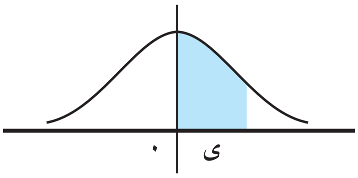
∴ ل (٠ ⩽ ص ⩽ ٠,٦٣) = ٠,٢٣٥٧

ل (٠ ⩽ ص ⩽ ٢,٥٧) = المساحة تحت المنحنى الطبيعى المعيارى فوق الفترة [٠ ، ٢,٥٧] أى أن ى = ٢,٥٧ ، لذلك نبحث فى الجدول بالصف أمام ٢,٥ وتحت العمود ٠,٠٧ فنجد العدد ٠,٤٩٤٩

∴ ل (٠ ⩽ ص ⩽ ٢,٥٧) = ٠,٤٩٤٩

حساب الاحتمال للمتغير الطبيعى المعيارى:

Calculating the probability of the standard normal variable

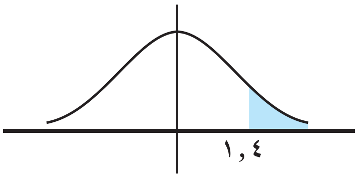


(١) إيجاد مساحة المنطقة تحت المنحنى فى الفترة [٠ ، ى] من الجدول

جدول المساحات أسفل المنحنى الطبيعى المعيارى يعطى المساحة التقريبية فوق الفترة [٠ ، ى] وأسفل المنحنى الطبيعى حيث ى ≥ ٠ ، أى أن الجدول يعطينا مباشرة: ل (٠ ≤ ص ≤ ى)

فمثلًا: ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٣) = ٠,١١٧٩ ، ل (٠ < ص ≤ ٠,٦٤) = ٠,٢٣٨٩

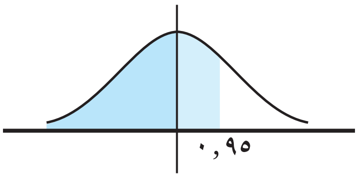
، ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٧) = ٠,٤٥٥٤ ، ل (٠ ≤ ص < ٢,٤٥) = ٠,٤٩٢٩



لاحظ أن: ل(ص ≥ ١,٤) = ٠,٥ − ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٤)

= ٠,٥٠ − ٠,٤١٩٢

= ٠,٠٨٠٨



بالمثل: ل(ص ≤ ٠,٩٥) = ٠,٥ + ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٩٥)

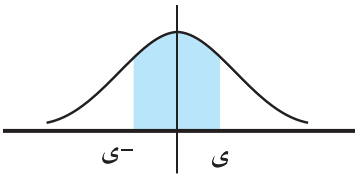
= ٠,٥ + ٠,٣٢٨٩

= ٠,٨٢٨٩

(٢) إيجاد مساحة المنطقة تحت المنحنى فى الفترة [− ى ، ٠] من الجدول

من تماثل المنحنى الطبيعى المعيارى حول المحور الرأسى نجد أن :

ل (-ى ≤ ص ≤ ٠) = ل (٠ ≤ ص ≤ ى)



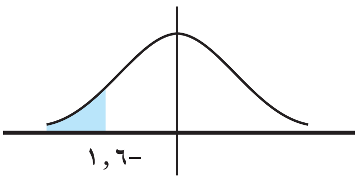
فمثلا: ل (-١,٢٥ ≤ ص ≤ ٠) = ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٢٥) = ٠,٣٩٤٤

، ل (-٢,٢٤ ≤ ص ≤ ٠) = ل (٠ ≤ ص ≤ ٢,٢٤) = ٠,٤٨٧٥

، ل (ص ≤ -١,٦) = ٠,٥ − ل (-١,٦ ≤ ص ≤ ٠)

= ٠,٥ − ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٦)

= ٠,٥ − ٠,٤٤٥٢ = ٠,٠٥٤٨

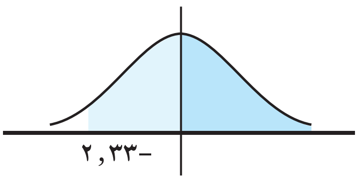


، ل (ص ≥ -٢,٣٢) = ٠,٥ + ل (-٢,٣٢ ≤ ص ≤ ٠)

= ٠,٥ + ل (٠ ≤ ص ≤ ٢,٣٢)

= ٠,٥ + ٠,٤٨٩٨ = ٠,٩٨٩٨

ملاحظة: ل (-ى ≤ ص ≤ى) = ٢ × ل (٠ ≤ ص ≤ ى)



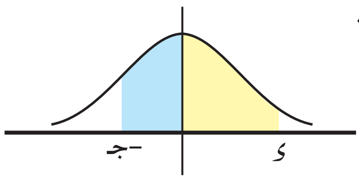
فمثلًا: ل(-١,٤ ≤ ص ≤ ١,٤) = ٢ × ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٤) = ٢ × ٠,٤١٩٢

= ٠,٨٣٨٤

، ل(-٢,٠ ≤ ص ≤ ٢,٠) = ٢× ل (٠ ≤ ص ≤ ٢,٠) = ٢ × ٠,٤٧٧٢ = ٠,٩٥٤٤

(٣) إيجاد مساحة المنطقة تحت المنحنى في أي فترة [جـ ، ى] :

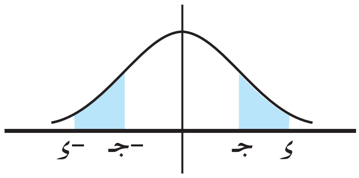
في هذه الحالة يفضل الاستعانة برسم المنحنى المعياري مع ملاحظة أن المحور الرأسي يقسم المساحة تحت المنحنى وفوق المحور الأفقي إلى منطقتين متساويتين في المساحة ومساحة كل منهما = ٠,٥



أولا: ل (- جـ ≤ ص ≤ ى) حيث جـ ، ى موجبان

= ل (- جـ ≤ ص ≤ ٠) + ل (٠ ≤ ص ≤ ى)

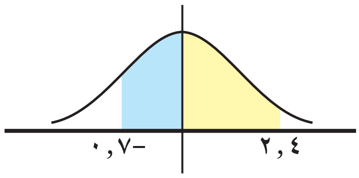
= ل (٠ ≤ ص ≤ جـ) + ل (٠ ≤ ص ≤ ى)



ثانيًا: ل (جـ ≤ ص ≤ ى) = ل (-ى ≤ ص ≤ -جـ)

= ل (٠ ≤ ص ≤ ى) − ل (٠ ≤ ص ≤ جـ)

فمثلا :

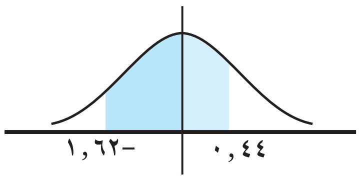


(١) ل (-٠,٧ ≤ ص ≤ ٢,٤)

= ل (-٠,٧ ≤ ص ≤ ٠) + ل(٠ ≤ ص ≤ ٢,٤)

= ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٧) + ل(٠ ≤ ص ≤ ٢,٤)من التماثل

= ٠,٢٥٨٠ + ٠,٤٩١٨ = ٠,٧٤٩٨

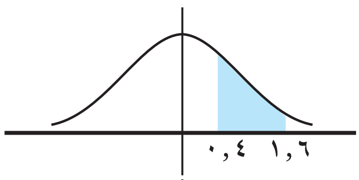


(٢) ل (-١,٦٢ < ص ≤ ٠,٤٤)

= ل(-١,٦٢ < ص ≤ ٠)+ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٤٤)

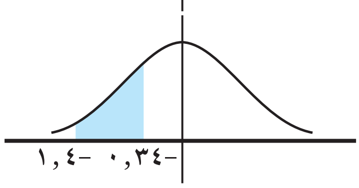
= ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٦٢) + ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٤٤) من التماثل

= ٠,٤٤٧٤ + ٠,١٧٠٠ = ٠,٦١٧٤



(٣) ل (٠,٤ ≤ ص < ١,٦) = ل(٠ ≤ ص < ١,٦) - ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٤)

= ٠,٤٤٥٢ − ٠,١٥٥٤ = ٠,٢٨٩٨



(٤) ل (- ١,٤ < ص < -٠,٣٤)

= ل(- ١,٤ < ص ≤ ٠) - ل(-٠,٣٤ < ص ≤ ٠)

= ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٤) + ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٣٤) من التماثل

= ٠,٤١٩٢ − ٠,١٣٣١ = ٠,٢٨٦١

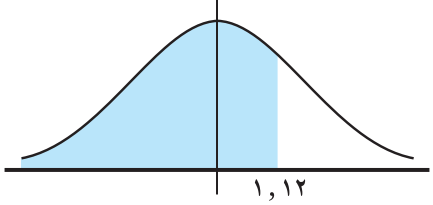
مثال

إيجاد المساحة أسفل المنحنى الطبيعي المعياري

٢ إذا كان ص متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا فأوجد:

أ ل(ص ≤ ١,١٢) ب ل(ص ≥ ١,٦٤) جـ ل(٠,٤٨ ≤ ص ≤ ٢,١)

الحل



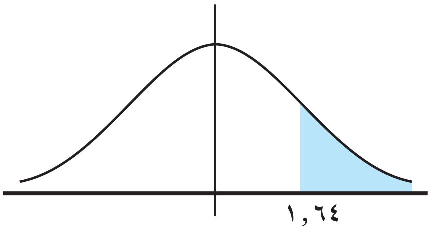
أ ل(ص ≤ ١,١٢) = ل(٠ ≤ ص ≤ ١,١٢) + ل(ص ≤ ٠)

= ٠,٣٦٨٦ + ٠,٥ = ٠,٨٦٨٦

ب ل(ص ≥ ١,٦٤)

= ل(ص ≥ ٠) - ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٦٤)

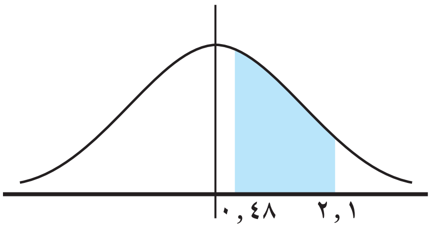
= ٠,٥ − ٠,٤٤٩٥ = ٠,٠٥٠٥



جـ ل(٠,٤٨ ≤ ص ≤ ٢,١)

= ل(٠ ≤ ص ≤ ٢,١) - ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٤٨)

= ٠,٤٨٢١ − ٠,١٨٤٤ = ٠,٢٩٧٧



حاول أن تحل

٢ إذا كان ص متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا فأوجد :

أ ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٨٢)　　ب ل(ص ≥ ٢,٣٢)

جـ ل(ص ≤ ١,٦٤)　　د ل(١,٠٨ ≤ ص ≤ ٣,١٢)

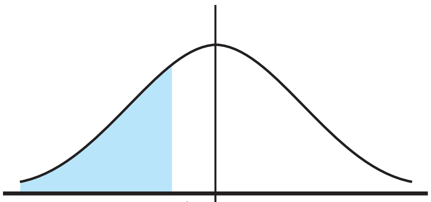
مثال

٣ إذا كان ص متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا فأوجد :

أ ل(ص ≤ -٠,٥٦)　　ب ل(ص ≥ -١,٠٦)

جـ ل(-١,٢ ≤ ص ≤ ٢,٤٨)　　د ل(-٢,٢ ≤ ص ≤ -٠,٤٦)

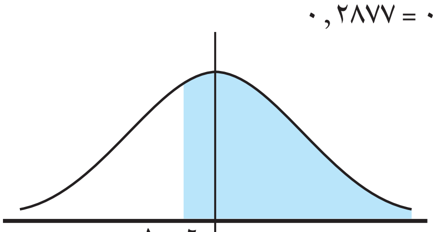
الحل



أ ل(ص ≤ -٠,٥٦)

= ل(ص ≥ ٠,٥٦)

= ٠,٥ - ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٥٦) = ٠,٥ − ٠,٢١٢٣ = ٠,٢٨٧٧

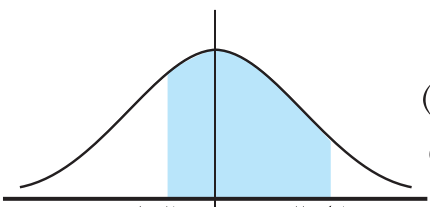


ب ل(ص ≥ -١,٠٦)

= ل(ص ≤ ١,٠٦)

= ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٠٦) + ٠,٥

= ٠,٠٦٣٦ + ٠,٥ = ٠,٥٦٣٦



جـ ل(-١,٢ ≤ ص ≤ ٢,٤٨)

= ل(-١,٢ ≤ ص ≤ ٠) + ل(٠ ≤ ص ≤ ٢,٤٨)

= ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٢) + ل(٠ ≤ ص ≤ ٢,٤٨)

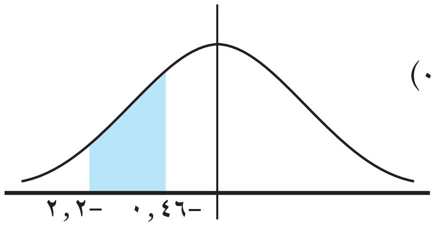
= ٠,٣٨٤٩ + ٠,٤٩٣٤ = ٠,٨٧٨٣

د) ل(−٢,٢ ≤ ص ≤ −٠,٤٦)

= ل(−٢,٢ ≤ ص ≤ ٠) − ل(−٠,٤٦ ≤ ص ≤ ٠)

= ل(٠ ≤ ص ≤ ٢,٢) − ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٤٦)

= ٠,٤٨٦١ − ٠,١٧٧٢ = ٠,٣٠٨٩



حاول أن تحل

٣) إذا كان ص متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا فأوجد :

أ) ل(ص ≤ −٠,٥٦)

ب) ل(ص ≥ −١,٠٦)

جـ) ل(−١,٢ ≤ ص ≤ ٢,٤٨)

د) ل(−٢,٢ ≤ ص ≤ −٠,٤٦)

مثال

التحويل من متغير طبيعى إلى متغير طبيعى معيارى

٤) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ . أوجد :

أ) ل(س > μ − ١,٥σ)

ب) ل(س < μ − ٠,٥σ)

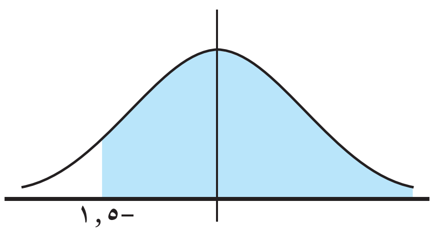
جـ) ل(μ − ١,٩٦σ < س < μ + ١,٩٦σ)

الحل

أ) ل(س > μ − ١,٥σ) = ل(ص > $\frac{\mu - ١,٥\sigma - \mu}{\sigma}$) = ل(ص > −١,٥)

= ل(−١,٥ < ص < ٠) + ٠,٥

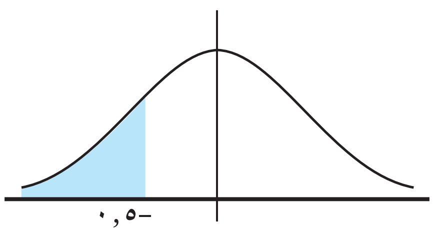
= ل(٠ < ص < ١,٥) + ٠,٥ = ٠,٤٣٣٢ + ٠,٥ = ٠,٩٣٣٢



ب) ل(س < μ − ٠,٥σ) = ل(ص < $\frac{\mu - ٠,٥\sigma - \mu}{\sigma}$)

= ل(ص < −٠,٥) = ل(ص > ٠,٥)

= ٠,٥ − ل(٠ < ص < ٠,٥) = ٠,٥ − ٠,١٩١٥ = ٠,٣٠٨٥

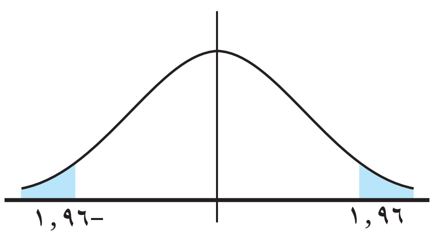


جـ) ل(μ − ١,٩٦σ < س < μ + ١,٩٦σ)

= ل($\frac{\mu - ١,٩٦\sigma - \mu}{\sigma}$ < ص < $\frac{\mu - ١,٩٦\sigma - \mu}{\sigma}$)

= ل(−١,٩٦ < ص < ١,٩٦)

= ٢ ل(٠ < ص < ١,٩٦) = ٢ × ٠,٤٧٥٠ = ٠,٩٥



حاول أن تحل

٤) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ . أوجد :

أ) ل(س < μ − ٢,١σ)

ب) ل(س > μ + ٠,٨σ)

جـ) ل(μ − ١,٤٨σ < س < μ + ١,٤٨σ)

مثال

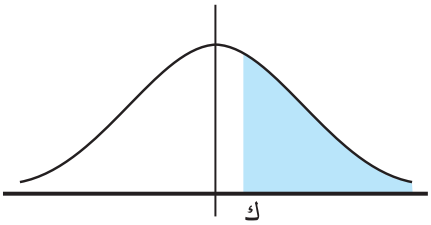
٥ إذا كان ص متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا فأوجد قيمة ك فى كل من الحالات الآتية :

أ ل (ص ≤ ك) = ٠,١٠٥٦ ب ل (ص ≥ ك) = ٠,١١٥١

جـ ل (-٠,٤٤ ≥ ص ≥ ك) = ٠,٥٥٨٨ د ل (ك ≥ ص ≥ ٢,١) = ٠,٢٩٠٦

الحل

أ نلاحظ أن : المساحة < ٠,٥ ، علامة المتباينة "أكبر من" لذلك فإن ك تقع فى الفترة الموجبة كما هو موضح بالشكل المقابل .



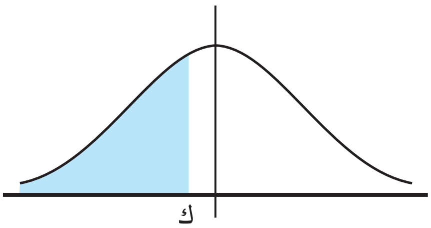
∵ ل (ص ≤ ك) = ٠,١٠٥٦

∴ ٠,٥ - ل(٠ ≥ ص ≥ ك) = ٠,١٠٥٦

∴ ل(٠ ≥ ص ≥ ك) = ٠,٥ - ٠,١٠٥٦ = ٠,٣٩٤٤

نبحث فى جداول المساحات عن العدد (ى) أو أقرب عدد إليه يناظر المساحة ٠,٣٩٤٤ فنجده ١,٢ تحت الفروق ٠,٠٥ أى أن : **ك = ١,٢٥**

ب <u>نلاحظ أن</u> : المساحة < ٠,٥ ، علامة المتباينة "أقل من" لذلك فإن ك تقع فى الفترة السالبة كما هو موضح بالشكل المقابل.



∵ ل (ص ≥ ك) = ٠,١١٥١

ومن التماثل فى المنحنى نجد أن : ل (ص ≤ ك) = ٠,١١٥١

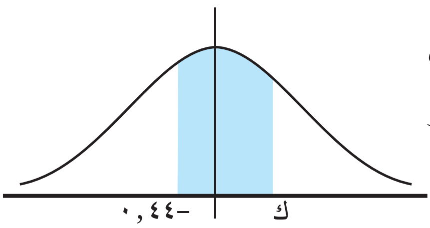
∴ ٠,٥ - ل(٠ ≥ ص ≥ ك) = ٠,١١٥١

∴ ل(٠ ≥ ص ≥ ك) = ٠,٥ - ٠,١١٥١ = ٠,٣٨٤٩

∴ **ك = - ١,٢** (**لاحظ أن ك تقع فى الجزء السالب**)

جـ <u>نلاحظ أن:</u>

المساحة < ٠,٥ وأحد طرفى الفترة يقع فى الفترة السالبة، لذلك يكون الطرف الآخر للفترة ى يقع فى الفترة الموجبة كما هو موضح بالشكل الجانبى .



∵ ل (-٠,٤٤ ≥ ص ≥ ك) = ٠,٥٥٨٨

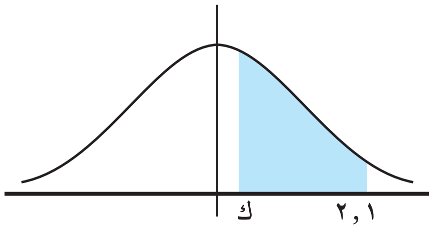
∴ ل (-٠,٤٤ ≥ ص ≥ ٠) + ل (٠≥ ص ≥ ك) = ٠,٥٥٨٨

∴ ل (٠ ≥ ص ≥ ٠,٤٤) + ل (٠ ≥ ص ≥ ك) = ٠,٥٥٨٨

∴ ٠,١٧٠٠ + ل (٠ ≥ ص ≥ ك) = ٠,٥٥٨٨

∴ ل (٠ ≥ ص ≥ ك) = ٠,٥٥٨٨ - ٠,١٧٠٠ = ٠,٣٨٨٨ ∴ **ك = ١,٢٢**

د نلاحظ أن :



المساحة > ٠,٥ وأحد طرفى الفترة يقع فى الفترة الموجبة،
لذلك يكون الطرف الآخر للفترة ى يقع فى الفترة الموجبة أيضًا
كما هوموضح بالشكل الجانبى .

∵ ل (ك ≤ ص ≤ ٢,١) = ٠,٢٩٠٦

∴ ل(٠ ≤ ص ≤ ٢,١) - ل(٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٢٩٠٦

∴ ل(٠ ≤ ص ≤ ك) = ل(٠ ≤ ص ≤ ٢,١) – ٠,٢٩٠٦

= ٠,٤٨٢١ – ٠,٢٩٠٦ = ٠,١٩١٥ ∴ ك = ٠,٥

حاول أن تحل

٥ إذا كان ص متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا فأوجد قيمة ك فى كل من الحالات الآتية :

أ ل (ص ≤ ك) = ٠,١٩٨٠ ب ل (ص ≥ ك) = ٠,١٩٨٠

جـ ل (- ٢,٤ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٧٩٧٠ د ل (ك ≤ ص ≤ ٢,٥) = ٠,٨٢٣٨

مثال

٦ س متغير عشوائى طبيعى متوسطه μ ، انحرافه المعيارى σ

أ إذا كان: ل (س ≥ ١٨٠) = ٠,٠٠٦٢ ، μ = ١٦٥ فاحسب σ

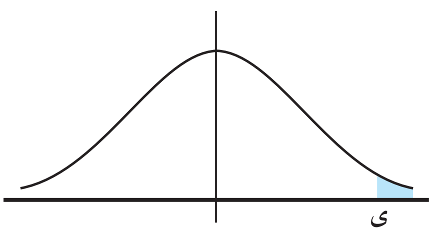
ب إذا كان: ل (س > ٣٥) = ٠,٨٦٤٣ ، σ = ٥ فاحسب μ

جـ إذا كان: ل (س ≤ ١٧٠) = ٠,٠٢٢٨ ، σ = ٧ فاحسب μ

د إذا كان: ل (س ≤ ك) = ٠,٨٩٤٤ ، μ = ١٢٥ ، σ = ٨ فاحسب ك

هـ إذا كان: ل (س > ك) = ٠,٩٤٥٢ ، μ = ٥٠ ، σ = ٥ فاحسب ك

الحل



أ ل(س ≥ ١٨٠) = ل (ص ≥ $\frac{١٨٠ - ١٦٥}{\sigma}$) = ٠,٠٠٦٢

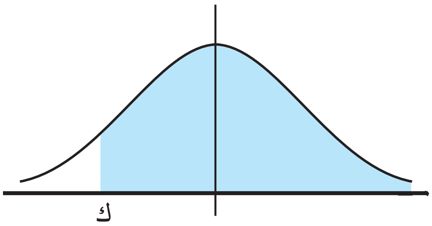
∴ ل (ص ≥ ى) = ٠,٠٠٦٢ حيث ى = $\frac{١٥}{\sigma}$ ، ى > ٠

∴ ل(٠ ≤ ص ≤ ى) = ٠,٥ – ٠,٠٠٦٢ = ٠,٤٩٣٨

∴ ى = ٢,٥

∴ $\frac{١٥}{\sigma}$ = $\frac{٥}{٢}$ ∴ σ = $\frac{١٥ \times ٢}{٥}$ ∴ σ = ٦

ب ل (س > ٣٥) = ل (ص > $\frac{٣٥ - \mu}{٥}$) = ٠,٨٦٤٣



∴ ل (ص > ك) = ٠,٨٦٤٣ حيث

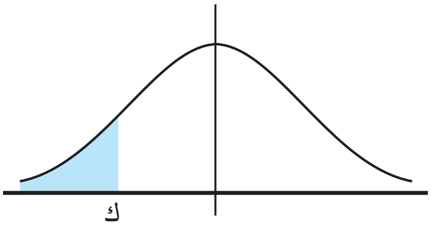
∴ ك = $\frac{٣٥ - \mu}{٥}$ ، ك < ٠ ∴ ل (٠ ≤ ص ≤ -ك) + ٠,٥ = ٠,٨٦٤٣

ل (-ك < ص ≤ ٠) = ٠,٨٦٤٣ - ٠,٥ = ٠,٣٦٤٣ ∴ ك = -١,١

∴ $\frac{٣٥ - \mu}{٥}$ = -١,١   ∴ ٣٥ - μ = -٥,٥

∴ μ = ٣٥ + ٥,٥   ∴ μ = **٤٠,٥**

ج ل (س ≤ ١٧٠) = ل (ص ≤ $\frac{١٧٠ - \mu}{٧}$) = ٠,٠٢٢٨



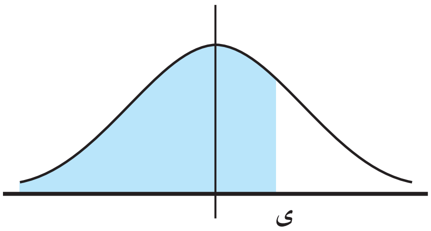
∴ ل (ص ≤ ك) = ٠,٠٢٢٨ حيث ك = $\frac{١٧٠ - \mu}{٧}$ ، ك < ٠

∴ ل (ك ≤ ص ≤ ٠) = ٠,٥ - ٠,٠٢٢٨ = ٠,٤٧٧٢

∴ ك = -٢

∴ $\frac{١٧٠ - \mu}{٧}$ = -٢   ∴ ١٧٠ - μ = -١٤   ∴ μ = ١٧٠ + ١٤   **μ = ١٨٤**

د ل (س ≤ ك) = ل (ص ≤ $\frac{ك - ١٢٥}{٨}$) = ٠,٨٩٤٤



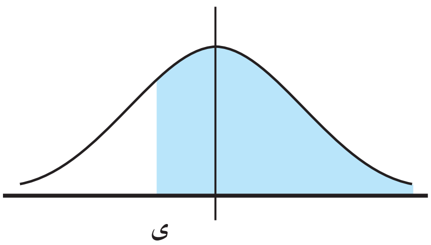
∴ ل (ص ≤ ى) = ٠,٨٩٤٤

حيث ى = $\frac{ك - ١٢٥}{٨}$ ، ى > ٠

∴ ل (٠ ≤ ص ≤ ى) = ٠,٨٩٤٤ - ٠,٥ = ٠,٣٩٤٤   ∴ ى = ١,٢٥

∴ $\frac{ك - ١٢٥}{٨}$ = ١,٢٥   ∴ ك - ١٢٥ = ١٠   ∴ ك = ١٢٥ + ١٠   **ك = ١٣٥**

هـ ل (س > ك) = ل (ص > $\frac{ك - ٥٠}{٥}$) = ٠,٩٤٥٢



∴ ل (ص > ى) = ٠,٩٤٥٢

حيث ى = $\frac{ك - ٥٠}{٥}$ ، ى < ٠

∴ ل (٠ ≤ ص < -ى) = ٠,٩٤٥٢ - ٠,٥ = ٠,٤٤٥٢   ∴ ى = -١,٦

∴ $\frac{ك - ٥٠}{٥}$ = -١,٦   ∴ ك - ٥٠ = -٨   ∴ ك = ٥٠ - ٨   **ك = ٤٢**

حاول أن تحل

٦ إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ وكان ل (س < ١٩) = ٠,٧٧٣٤ ، ل (س > ١٠) = ٠,٩٣٣٢ احسب قيمة كل من μ ، σ .

تمارين (٤ - ١)

١ إذا كان ص متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا فأوجد :

أ ل (٠ ≤ ص ≤ ١,١٥) ، ل (٠ ≥ ص ≥ ٢,٤٢)

ب ل (-٠,٠٤ ≤ ص ≤ ٠) ، ل (-١,٦٣ ≤ ص ≤ ٠)

جـ ل (-٠,٧ ≤ ص ≤ ٠,٧) ، ل (-١,٦٥ ≤ ص ≤ ١,٦٥)

د ل (-٢,٤٢ ≤ ص ≤ ١,٦٧) ، ل (-١,٧٣ ≤ ص ≤ ٠,٦٤)

هـ ل (٠,٧٤ ≤ ص ≤ ١,٠٢) ، ل (١,٤ ≤ ص ≤ ٢,٢)

و ل (-٢,١ ≤ ص ≤ -٠,٩٢) ، ل (-١,٥ ≤ ص ≤ -٠,٨٤)

ز ل (ص ≤ ١,٤٤) ، ل (ص ≤ ٢,٠٥)

ح ل (ص ≤ -١,١٤) ، ل (ص ≤ -٢,٣٢)

ط ل (ص ≤ ٠,٦٥) ، ل (ص ≤ ١,٤٢)

ى ل (ص ≤ -٠,٤٥) ، ل (ص ≤ -١,٦)

٢ إذا كان ص متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا فأوجد قيمة العدد الحقيقى (ك) الذى يحقق :

أ ل (٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٣٥٥٤

ب ل (ك ≤ ص ≤ ٠) = ٠,٤١٢٠

جـ ل (- ك ≤ ص ≤ ك) = ٠,٢٢٠٦

د ل (ص ≤ ك) = ٠,٩٧٥٤

هـ ل (ص ≤ ك) = ٠,١٩٧٧

و ل (ص ≥ ك) = ٠,٠٩٣٤

ز ل (ص ≥ ك) = ٠,٩٩٥٥

ح ل (ك ≤ ص ≤ ١,١١) = ٠,٦٦٦٠

ط ل (ك ≤ ص ≤ ٢,٢٢) = ٠,٢٤٤٦

ى ل (-١,٧ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٣٢٦١

٣ ص متغير عشوائى طبيعى معيارى ، فإذا كان :

أ ل (ص ≤ ك)= ٠,١٧٣٦ أوجد: ل (ك ≤ ص ≤ ١,٧)

ب ل (صـ ≤ ك) = ٠,٠٢٠٧ — أوجد: ل (٠,٥٦ ≤ صـ ≤ ك)

ج ل (صـ ≥ ك) = ٠,٨٩٤٤ — أوجد: ل (-٠,٧ ≤ صـ ≤ ك)

د ل (٠,٤ ≤ صـ ≤ ك) = ٠,٣١١٠ — أوجد: ل (صـ ≥ ك)

هـ ل (١,٤ ≤ صـ ≤ ك) = ٠,٠٧٧٠ — أوجد: ل (-١,٤ ≤ صـ ≤ ك)

و ل (ك ≤ صـ ≤ ١,٧) = ٠,٨٥٨٦ — أوجد: ل (ك ≤ صـ ≤ ٠,٧٥)

٤ سـ متغير عشوائى طبيعى متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ وكان

أ ل (سـ ≥ ٩٠) = ٠,٠٦٦٨ ، μ = ١٠٢ فاحسب σ

ب ل (سـ ≤ ٦٢) = ٠,٠٥٤٨ ، μ = ٥٠ فاحسب σ

ج ل (سـ ≤ ٤٨) = ٠,٠٢٢٨ ، σ = ٤ فاحسب μ

د ل (سـ > ٦٨) = ٠,١٠٥٦ ، σ = ٦,٤ فاحسب μ

هـ ل (سـ ≤ ٤٢) = ٠,٨٩٤٤ ، σ = ٦,٤ فاحسب μ

و ل (μ - ك σ ≤ سـ ≤ μ + ك σ) = ٠,٤٣٨ فاحسب ك

ز ل (سـ ≥ ك) = ٠,٢١١٩ ، μ = ٤٢ ، σ = ٥ فاحسب ك

ح ل (سـ ≥ ك) = ٠,٨٤١٣ ، μ = ٧٢ ، σ = ٨ فاحسب ك

ط ل (سـ > ك) = ٠,٩٧٧٢ ، μ = ٦٠ ، σ = ٤ فاحسب ك

٥ أجب عن الأسئلة الآتية

أ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه ١٢٠ وانحرافه المعيارى ١٠ وكان ل(سـ > ك) = ٠,٩٥٩٩ فأوجد قيمة ك .

ب إذا كان سـ متغيرًا طبيعيًا متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ = ٥ فأوجد قيمة μ التى تجعل ل (سـ ≥ ٣٥) = ٠,٠٢٢٨

ج إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه μ = ٨ وانحرافه المعيارى σ = ٢ ، وكان ل (سـ ≤ ك) = ٠,١٠٥٦ فأوجد :

أولا : قيمة ك . **ثانيًا** : ل (سـ ≥ ١٠)

د إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه μ و انحرافه المعيارى σ فأوجد ل ($\mu - \frac{1}{4}\sigma$ ≤ سـ ≤ $\mu + \frac{1}{2}\sigma$)

(هـ) إذا كان ص متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا فأوجد قيمة ك التى تحقق :

أولاً : ل (ص > ك) = ٠,٠٢٨١

ثانياً : ل(– ١< ص > ك) = ٠,٧٩١٨

(و) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه ١٨ و انحرافه المعيارى ٢,٥ فأوجد :

اولاً: ل(س > ١٥)

ثانياً: ل (١٧< س > ٢١)

(ز) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه μ = ٢٤ وانحرافه المعيارى σ = ٥ فأوجد :

أولا : ل (س ≤ ٣٢,٥)

ثانيًا : ل (١٤ > س > ٢٩)

(ح) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه μ = ٤٨ انحرافه المعيارى σ = ٥ فأوجد:

أولاً : ل (٤٣ > س > ٥٩)

ثانيًا : قيمة ك إذا كان ل (س > ك) = ٠,١٨٤١ .

(ط) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه μ = ١٧ انحرافه المعيارى σ = ٢ فأوجد:

أولا : ل (١٦ ≥ س ≥ ٢٠)

ثانيًا : ل (س < ١٥)

(ى) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه ٣٢ ، وتباينه ١٦ ، فأوجد :

أولا : ل (س > ٢٥)

ثانيًا : ل (٢٨ > س > ٣٥)

(ك) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه μ = ٨ انحرافه المعيارى σ = ٢ فأوجد:

أولا : ل (س ≥ ١٠)

ثانيًا : إذا كان ل (س ≤ ك) = ٠,١٠٥٦ ، فأوجد قيمة ك .

الوحدة الرابعة

٤ - ٢

بعض التطبيقات العملية للتوزيع الطبيعى

Some Practical Applications of the Normal Distribution

سوف تتعلم

- تطبيقات عملية التوزيع الطبيعى

المصطلحات الأساسية

- التوزيع الطبيعى *Normal Distribution*
- المنحنى الطبيعى *Normal Curve*
- المتغير العشوائى الطبيعى *Normal Random Variable*
- التوزيع الطبيعى المعيارى *Standard normal distribution*

مقدمة:

فى الدرس السابق تعرفنا على التوزيع الطبيعى وخواصه ،كما تعرفنا على المتغير العشوائى الطبيعى المعيارى وكيفية إيجاده من التوزيع الطبيعى بمعلومية المتوسط والانحراف المعيارى ، كما تعرفنا على كيفية حساب احتمالات متغير عشوائى له توزيع طبيعى معيارى باستخدام الجداول الإحصائية. وفى هذا الدرس سوف نتناول بعض الاستخدامات المختلفة للمتغير العشوائى الطبيعى فى دراسة بعض الظواهر التى يعبر عنها .

مثال **الربط بالصناعة**

(١) ماكينة بأحد المصانع تنتج أسطوانات أطوالها تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٥٦ سم وانحرافه المعيارى ٢سم، تكون الأسطوانة المنتجة مقبولة إذا كان طولها ينحصر بين ٥١ سم، ٦٠ سم، اختيرت عينة عشوائية من ١٠٠٠ أسطوانة، فكم عدد الأسطوانات المتوقع قبولها؟

الحل

باعتبار أن س متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا يعبر عن طول الأسطوانة

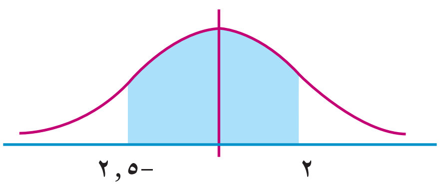
∴ احتمال (الأسطوانة مقبولة) = ل (٥١ < س < ٦٠)

= ل ($\frac{٥١ - ٥٦}{٢}$ < ص < $\frac{٦٠ - ٥٦}{٢}$)

= ل (-٢,٥ < ص < ٢)

= ل (-٢,٥ < ص ≤ ٠) + ل (٠ ≤ ص < ٢)

= ٠,٤٩٣٨ + ٠,٤٧٧٢ = ٠,٩٧١٠



∴ عدد الأسطوانات المتوقع قبولها = ١٠٠٠ × ٠,٩٧١٠ = ٩٧١ أسطوانة

حاول أن تحل

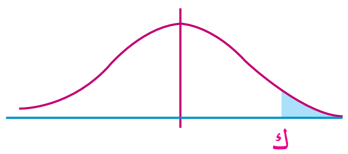
(١) الربط بالدخل: إذا كان الدخل الشهرى لمجموعة مكونة من ٢٠٠ عامل فى أحد المصانع يتبع التوزيع الطبيعى متوسط ١٧٥ جنيهًا وانحرافه المعيارى ١٠ جنيهات، فما هو عدد العاملين الذين يتراوح دخلهم بين ١٧٠ جنيهًا، ١٨٠ جنيهًا.

الأدوات المستخدمة آلة حاسبة علمية

مثال

٢ **الربط بالتعليم:** إذا كانت درجات الطلاب فى إحدى المدارس هى متغير عشوائى طبيعى متوسطه μ = ٤٤ وانحرافه المعيارى σ ، حيث حصل ٢٢,٦٦٪ من الطلاب على أكثر من ٥٠ درجة ، أوجد قيمة σ .

الحل



نفرض أن س متغير عشوائى طبيعى يعبر عن درجات الطلاب .

∴ ل (س > ٥٠) = $\frac{٢٢,٦٦}{١٠٠}$

∴ ل (ص > $\frac{٥٠ - ٤٤}{\sigma}$) = ٠,٢٢٦٦

∴ ل (ص > ك) = ٠,٢٢٦٦ حيث ك = $\frac{٦}{\sigma}$ ، ك > ٠

∴ ل (٠ ≤ ص < ك) = ٠,٥ - ٠,٢٢٦٦ = ٠,٢٧٣٤

∴ ك = ٠,٧٥ ∴ $\frac{٦}{\sigma}$ = ٠,٧٥ ∴ σ = $\frac{٦}{٠,٧٥}$ = ٨

حاول أن تحل

٢ إذا كانت درجات الطلاب فى أحد الامتحانات تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٦٠ وانحرافه المعيارى ١٢ ، واختير طالب عشوائيًّا ، أوجد احتمال أن تكون درجة الطالب واقعة بين ٦٦، ٧٥ درجة و إذا كان ١٥٪ من الطلاب الأوائل بالترتيب حصلوا على تقدير ممتاز ، فأوجد أقل درجة للطالب الحاصل على تقدير ممتاز.

مثال

٣ **الربط بالطول:** إذا كان أطوال الطلاب فى إحدى المدارس الثانوية يتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه μ = ١٦٠ سم، وانحرافه المعيارى σ = ٥ سم فأوجد احتمال أن يختلف طول أى طالب عن μ بما لا يزيد عن ٨ سم .

الحل

نفرض أن س متغير عشوائى طبيعى يعبر عن أطوال الطلاب اختلاف الطول عن μ = | س - μ | " أى الفرق المطلق بين الطول والمتوسط μ"

∴ ل (| س - μ| < ٨) = ل(|س - ١٦٠| < ٨)

∴ ل(-٨ < س - ١٦٠ < ٨)

= ل (١٥٢ < س < ١٦٨)

= ل ($\frac{١٥٢ - ١٦٠}{٥}$ < ص < $\frac{١٦٨ - ١٦٠}{٥}$)

= ل (-١,٦ < ص < ١,٦)

= ٢ × ل (٠ ≤ ص < ١,٦)

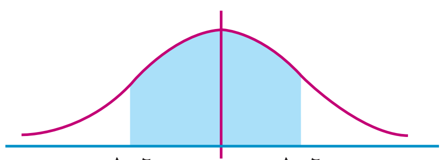
= ٢ × ٠,٤٤٥٢ = ٠,٨٩٠٤

تذكر أن

التعبير : |س - أ| < ب يكافئ:

التعبير : - ب < س - أ < ب

أى أن: أ - ب < س < أ + ب



؟ حاول أن تحل

٣ **الربط بالوزن:** إذا كان توزيع أوزان التلاميذ فى إحدى المدارس الابتدائية يتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٣٠ كجم وانحراف معيارى ٥ كجم، احسب النسبة المئوية لعدد التلاميذ الذين يزيد أوزانهم عن ٤٥ كجم، وكذلك النسبة المئوية لعدد التلاميذ الذين يقع أوزانهم بين ٢٥، ٣٥ كجم.

مثال

٤ **الربط بالعمل:** إذا كان توزيع أجور عمال أحد المصانع هو توزيع طبيعى متوسطه μ = ٧٥ جنيهًا وانحراف معيارى σ = ١٠ فأوجد:

أ النسبة المئوية لعدد العمال الذين تزيد أجورهم عن ٩٠ جنيهًا.

ب النسبة المئوية لعدد العمال الذين تقل أجورهم عن ٥٥ جنيهًا.

ج النسبة المئوية لعدد العمال الذين تتراوح أجورهم بين ٦٠ ، ٨٠ جنيهًا.

الحل

أ $\because$ ل (س > ٩٠) = ل (ص > $\frac{٩٠ - ٧٥}{١٠}$)

= ٠,٥ − ل (٠ $\leqslant$ ص $\leqslant$ ١,٥) = ٠,٥ − ٠,٤٣٣٢ = ٠,٠٦٦٨

$\therefore$ نسبة عدد العمال الذين تزيد أجورهم عن ٩٠ جنيهًا = ٦,٦٨ ٪

ب $\because$ ل (س < ٥٥) = ل (ص < $\frac{٥٥ - ٧٥}{١٠}$) = ل (ص < -٢)

= ٠,٥ - ل (٠ $\leqslant$ ص $\leqslant$ ٢) = ٠,٥ − ٠,٤٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

$\therefore$ نسبة عدد العمال الذين تقل أجورهم عن ٥٥ جنيهًا = ٢,٢٨ ٪ من العدد الكلى

ج $\because$ ل (٦٠ $\leqslant$ ص $\leqslant$ ٨٠) = ل ($\frac{٦٠ - ٧٥}{١٠}$ $\leqslant$ ص $\leqslant$ $\frac{٨٠ - ٧٥}{١٠}$)

= ل (-١,٥ $\leqslant$ ص $\leqslant$ ٠,٥) = ل (٠ $\leqslant$ ص $\leqslant$ ١,٥) +

ل (٠ $\leqslant$ ص $\leqslant$ ٠,٥) = ٠,١٩١٥ + ٠,٤٣٣٢ = ٠,٦٢٤٧

$\therefore$ نسبة عدد العمال الذين تتراوح أجورهم بين ٦٠ ، ٨٠ جنيهًا = ٦٢,٤٧ ٪ من العدد الكلى لعمال المصنع .

؟ حاول أن تحل

٤ بفرض أن درجات أحد الامتحانات هى متغير طبيعى بتوقع ٧٦ وانحراف معيارى ١٥ درجة وبترتيب الطلاب الأوائل الحاصلين على درجة أعلى من الدرجة α فكانوا يمثلون ١٥ ٪ من إجمالى الطلاب ، وبترتيب الطلاب الحاصلين على أقل الدرجات أدنى من الدرجة β وجد أنهم يمثلون ١٠ ٪ من إجمالى الطلاب أوجد :

أ أقل درجة α كى يعتبر الطالب من الأوائل .

ب درجة الرسوب β .

تمـاريـن ٤ - ٢

١) إذا كان الدخل الشهرى لعدد ١٠٠٠ أسرة فى إحدى المدن هو متغير عشوائى طبيعى متوسطه ١٧٠ جنيهًا وانحرافه المعيارى ٢٠ جنيهًا اختيرت أسرة عشوائيًا ،أوجد:

أ) احتمال أن يكون دخلها ينحصر بين ١٦٠ جنيهًا، ٢٠٠ جنيهًا .

ب) عدد الأسر التى يزيد دخلها عن ١٥٠ جنيهًا .

٢) إذا كان أوزان الطلاب فى إحدى الكليات تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٦٨,٥ كيلو جرامًا وانحرافه المعيارى ٢,٥ كيلو جرامًا .

أ) احسب النسبة المئوية للطلاب الذين تقع أوزانهم بين ٦٧,٥ كيلو جرامًا ، ٧١ كيلو جرامًا .

ب) إذا كان عدد الطلاب ١٠٠٠ طالب فاحسب عدد الطلبة الذين تزيد أوزانهم عن ٧١ كيلو جرامًا .

٣) أخذت عينة عشوائية من ٢٠٠ تلميذ من مدرسة . فإذا كانت أعمارهم متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه ١٦,٦ وانحرافه المعيارى ١,٢ ، أوجد عدد التلاميذ الذين تقل أعمارهم عن ١٦ سنة من تلك العينة .

٤) إذا كانت أطوال ٢٠٠٠ طالب بإحدى الكليات تتبع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط ١٧٠ سم وانحراف معيارى ٨ سم فأوجد عدد الطلاب الذين تقل أطوالهم عن ١٧٦ سم .

٥) إذا كان الدخل الشهرى لـ ٣٠٠ أسرة يمثل متغيرًا عشوائيًّا سـ يتبع التوزيع الطبيعى بتوقع μ = ٥٠٠ جنيه وانحراف معيارى σ = ٢٠ جنيهًا فأوجد

أ) عدد الأسر التى تحصل على دخل شهرى أكبر من ٥٣٠ جنيهًا .

ب) الحد الأعلى للدخل لنسبة الـ ٤ ٪ من الأسر التى تحصل على أدنى الدخول .

٦) إذا كان الدخل الشهرى لـ ٢٠٠ أسرة متغيرًا عشوائيًّا سـ يتبع توزيعًا طبيعيًّا بتوقع μ = ٤٠٠ وانحراف معيارى σ = ٨٠ جنيهًا . واختيرت أسرة عشوائيًّا من هذه الأسر ، فأوجد :

أ) احتمال أن يكون الدخل الشهرى للأسرة أكبر من ٥٠٠ جنيه على الأكثر

ب) عدد الأسر التى تحصل على دخل شهرى ٥٠٠ جنيه على الأكثر .

٧) إذا كان عمر التشغيل (بالساعات) لنوع من البطاريات متغيرًا عشوائيًّا يتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط ٢٠٠٠ ساعة وانحراف معيارى ١٢٠ ساعة ، فما احتمال أن تستمر البطارية فى التشغيل لأكثر من ١٨٠٠ ساعة.

٨ إذا كان الدخل الشهرى لمجموعة مكونة من ٥٠٠ عامل يتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ١٨٠ جنيهًا وانحرافه المعيارى ١٥ جنيهًا فأوجد عدد العمال الذين يقل دخلهم عن ١٩٨ جنيهًا.

٩ إذا كان ارتفاع مياه الأمطار خلال شهر فبراير يتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه μ = ٣ سم ، وتباينه σ^2 = ٤ سم^2 ، فأوجد احتمال أن يكون ارتفاع الأمطار فى شهر فبراير فى العام التالى :

أ أكبر من ١ سم   ب بين ٣,٥ سم ، ٤ سم

١٠ إذا كانت درجات الحرارة فى شهر أغسطس تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه μ = ٣٥ درجة ، وانحرافه المعيارى σ = ٥ درجات ، فأوجد احتمال أن تكون درجة الحرارة فى يوم ما خلال هذا الشهر:

أ واقعة بين ٢٨ درجة ، ٣٨ درجة.   ب أكبر من ٣٩ درجة .

ج واقعة بين ٢٦ درجة ، ٣٢ درجة.

١١ تقدم ١٠٠٠ شاب إلى إدارة التجنيد، فإذا كانت أطوالهم تتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط ١٧٠ سم، وانحراف معيارى ١٠ سم، أوجد عدد الشباب :

أ الذين تقل أطوالهم عن ١٩٠ سم

ب غير المقبولين إذا كان الحد الأدنى للطول المطلوب هو ١٥٥ سم

١٢ وجد أن أطوال نوع معين من النبات تكون موزعة حسب التوزيع الطبيعى بمتوسط ٥٠ سم، وانحراف معيارى σ ، إذا علم أن ١٠,٥٦٪ من هذا النبات أقل من ٤٥ سم، فأوجد التباين لأطوال هذا النبات

١٣ إذا كانت أوزان الطلبة فى إحدى الكليات تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٦٥ كيلوجراما، وانحرافه المعيارى σ، وكانت أوزان ٣٣٪ من الطلبة تزيد عن ٧٠ كيلو جرامًا.

أ أوجد قيمة σ

ب إذا كان عدد الطلبة ١٠٠٠ طالب فاحسب عدد الطلبة الذين تقل أوزانهم عن ٦٧,٥ كيلوجرام

١٤ إذا كان أوزان الطلبة فى إحدى الكليات تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٦٨,٥ كيلو جرام وانحرافه المعيارى ٢,٥ كيلو جرام :

أ احسب النسبة المئوية للطلاب تقع أوزانهم بين ٦٧,٥ كيلو جرام ، ٧١ كيلو جرام .

ب إذا كان عدد الطلاب ١٠٠٠ طالب فاحسب عدد الطلاب الذين تزيد أوزانهم عن ٧١ كيلوجرامًا.

١٥ إذا كان درجات الطلاب فى إحدى المدارس هى متغير عشوائى طبيعى بمتوسط μ = ٤٢ وانحرافه المعيارى σ حيث حصل ٢٦,١١ ٪ من الطلاب على أكثر ٥٠ درجة فأوجد قيمة σ .

(١٦) فى امتحان مادة الرياضيات كانت درجات الطلبة موزعة توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط قدره ٧٠ وانحراف معيارى ٥ ، أوجد عدد الطلبة الذين تزيد درجاتهم عن ٧٨ إذا علم أن عدد الطلبة المتقدمين للامتحان ١٠٠ طالب .

(١٧) ينتج أحد المصانع أسطوانات أطوالها يتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٥٦ سنتيمترًا وانحرافه المعيارى٢سنتيمترا، وتكون الأسطوانات المنتجة مقبولة إذا كان طولها ينحصر بين ٥١ ، ٦٠ سنتيمترا ،أخذت عينة عشوائية من ١٠٠٠ أسطوانة . كم عدد الأسطوانات المتوقع قبولها؟

(١٨) إذا كانت أنصاف أقطار الحلزونات التى تنتجها أحد المصانع موزعة توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط ٢٥ سم ، وانحراف معيارى ٢٠ سم ، يعتبر الحلزون معيبًا إذا كان نصف قطره يقل عن ٢٠ سم أو يكبر عن ٢٨ سم اختير حلزون عشوائيًّا . أوجد احتمال أن يكون الحلزون معيبًا .

(١٩) إذا كانت أوزان مجموعة من حيوانات التجارب تتبع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط μ جرام وانحراف معيارى ١٠ جرامات فإذا علمت أن : ل (س $\leqslant$ ١٨٠) = ٠,١٥٨٧ احسب المتوسطμ .

(٢٠) إذا كانت درجات الطلاب فى امتحان ما متغيرًا عشوائيًّا يتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ فأوجد :

أ احتمال الذين يحصلون على درجة أكبر من $(\mu - \sigma)$.

ب النسبة المئوية للطلاب الذين يحصلون على درجة محصورة بين : $(\mu - ٢\sigma)$ ، $(\mu + ٢\sigma)$.

(٢١) وجد أن أطوال نوع معين من النبات تكون موزعة حسب التوزيع الطبيعى بمتوسط μ وانحراف معيارى ٤. إذا علم أن أطوال ١٠,٥٦ ٪ من هذا النبات أقل من ٤٥ سم ، فأوجد المتوسط μ لهذا النبات .

(٢٢) إذا كانت درجات الحرارة فى شهر يناير تتبع توزيعًا طبيعيًّا وسطه الحسابى ١٦ درجة وانحرافه المعيارى ٤ درجات فأوجد احتمال أن تكون درجة الحرارة فى يوم ما خلال هذا الشهر :

أ واقعة بين ١٤ درجة ، ٢٠ درجة

ب أكبر من ١٥ درجة .

(٢٣) فى أحد المجتمعات وجد أن نسب الذكاء تتوزع توزيعًا طبيعيًّا وسطه الحسابى ١٠٤,٦ وانحرافه المعيارى ٦,٢٥

أ أوجد نسبةالأفراد الذين تقع نسب ذكائهم بين ٩٠، ١٢٠

ب أوجد نسبة الأفراد الذين تزيد نسب ذكائهم عن ١١٠ .

ملخص الوحدة

المتغير العشوائى الطبيعى

المتغير العشوائى الطبيعى المتصل سـ مداه يتحدد بالفترة]-∞ ، ∞[ودالة الكثافة الاحتمالية له تمثل بمنحنى يتخذ دائمًا شكل الجرس و يتحدد شكله بمعرفة قيمتين هما المتوسط μ والانحراف المعيارى σ.

خواص المنحنى الطبيعى

١ له قمة واحدة وطرفاه يمتدان إلى - ∞ ، ∞ .

٢ له محور تماثل يمر بالقمة و يقطع المحور الأفقى عند س = μ .

٣ مساحة المنطقة الواقعة أسفل المنحنى الطبيعى وفوق المحور الأفقى تساوى الواحد الصحيح .

٤ من التماثل نجد أن المستقيم س = μ يقسم المساحة الواقعة تحت المنحنى وفوق المحور الأفقى إلى منطقتين مساحة كل منهما = ٠,٥ .

٥ يمكن حساب المساحة التقريبية للمنطقة أسفل المنحنى وأعلى المحور الأفقى تبعًا للفترات الآتية :

- من $\mu - \sigma$ إلى $\mu + \sigma$ = ٦٨,٢٦٪ من المساحة الكلية .
- من $\mu - ٢\sigma$ إلى $\mu + ٢\sigma$ = ٩٥,٤٤٪ من المساحة الكلية .
- من $\mu - ٣\sigma$ إلى $\mu + ٣\sigma$ = ٩٩,٧٤٪ من المساحة الكلية .

التوزيع الطبيعى المعيارى

إذا كان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ هو التوزيع الطبيعى بمتوسط μ وانحراف معيارى σ فإن:

صـ = $\frac{\text{سـ} - \mu}{\sigma}$ هو توزيع طبيعى معيارى توقعه صفر وانحرافه المعيارى = ١ .

خواص دالة الكثافة للتوزيع الطبيعى المعيارى :

١ المنحنى يقع أعلى المحور الأفقى.

٢ متماثل بالنسبة للمحور الرأسى.

٣ طرفا المنحنى يمتدان إلى ما لا نهاية دون أن يلتقيا بالمحور الأفقى .

٤ مساحة المنطقة أسفل المنحنى وفوق المحور الأفقى = ١

٥ من التماثل نجد أن المحور الرأسى يقسم المساحة الواقعة تحت المنحنى وفوق المحور الأفقى إلى منطقتين مساحة كل منهما = ٠,٥.

٦ يمكن حساب المساحة التقريبية للمنطقة أسفل المنحنى المعيارى فقط وفوق أى فترة [أ ، ب] بواسطة جداول خاصة .

جدول المساحة أسفل منحنى التوزيع الطبيعى المعيارى :

لتحويل التوزيع الطبيعىسـ إلى توزيع طبيعى معيارى صـ نستخدم العلاقة :

صـ = $\frac{\text{سـ} - \mu}{\sigma}$ ومن جدول التوزيع الطبيعى المعيارى المرفق فى نهاية الكتاب يمكن إيجاد المساحة المطلوبة .

تمارين عامة

(١) أثبت أنه لأى توزيع طبيعى لمتغير عشوائى س متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ يكون ل (س $\geqslant \mu + ٢\sigma$) = ٠,٠٢٢٨

(٢) إذا كان س متغيرًا طبيعيًّا متوسطه μ وتباينه ٦٤ فأوجد قيمة μ إذا كان ل (س $<$ ٧٠) = ٠,١٧

(٣) أوجد σ إذا علم أن ل (س $<$ ٣٧,٢٥) = ٠,٠٤٤٦ وكانت μ = ٥٠

(٤) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه μ = ١٦ وانحرافه المعيارى σ = ٤ احسب قيمة كل من :
أ ل (س $\leqslant$ ١٩) ب ل (٩ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٢٠) ج ل (س $\geqslant$ ١٠)

(٥) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ وكان ل (س $<$ ١٩) = ٠,٧٧٣٤ ، ل (س $>$ ١٠) = ٠,٩٣٣٢ فأوجد قيمة كل من μ ، σ.

(٦) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ فأوجد قيمة كل من :
أ ل(μ - ٢σ $\leqslant$ س $\leqslant$ μ + ٢σ)
ب ل(μ - ١,٣٥σ $\leqslant$ س $\leqslant$ μ - ٠,٧σ) احسب قيمة كل من μ، σ

(٧) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ وكان :
أ ل (س $>$ ٤٥) = ٠,٠٢٢٨ ، σ = ١٠ أوجد μ
ب ل (س $\geqslant$ ١٥) = ٠,٨٤١٣ ، σ = ٥ أوجد μ
ج ل (س $<$ ٥٥) = ٠,٣٠٨٥ ، μ = ٦٠ أوجد σ

(٨) إذا كان س متغيرًا طبيعيًّا متوسطه ٥٠ وانحرافه المعيارى ١٠ فأوجد :
أ ل (س $>$ ٧٠) ب قيمة ك إذا كان ل (س $<$ ك) = ٠,١٥٨٧

(٩) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا له توزيع طبيعى متوسطه ١٠٠ وانحرافه المعيارى ٤
أ إذا كان ل (س $>$ أ) = ٠,٥٦٣٦ فأوجد قيمة أ
ب أوجد ل (س $<$ ٩٠)
ج أوجد ل (س $>$ ١٠٨)
د أوجد ل (٩٥ $<$ س $<$ ١٠٥)

(١٠) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ = ٨ وكان ل (س $\geqslant$ ٤٠) = ٠,١٥٨٧
فأوجد :
أ قيمة المتوسط ب ل (س $>$ ٥٠)

(١١) إذا كان ص متغيرًا عشوائيًّا معياريًا وكان :
أ ل (ص $>$ ك) = ٠,١٠٥٦ فأوجد قيمة ك
ب ل - ٠,٤٤ $\leqslant$ ص $\leqslant$ ك) = ٠,٥٥٨٨ فأوجد قيمة ك

(١٢) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ أوجد :

أ ل (س < μ)
ب ل (س > μ)

جـ ل (μ - σ ≥ س ≥ μ + σ)
د ل (س < μ + ٢ σ)

هـ ل (μ - σ ≥ س ≥ μ + ٢ σ)
و ل (μ - ٠,٥ σ ≥ س ≥ μ + ٠,٥ σ)

(١٣) إذا كان س متغيرًا طبيعيًّا متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ وكان أ > ٠ فأوجد أ بحيث:

أ ل (μ - أ σ ≥ س ≥ μ + أ σ) = ٠,٦٤٧٦

ب ل (μ - أ σ ≥ س ≥ μ + أ σ) = ٢ ل (٠ ≥ ص ≥ ١,٤٨)

(١٤) إذا كان س متغيرًا طبيعيًّا متوسطه ٧٥ وانحرافه المعيارى ١٥ فأوجد قيمة ك إذا كان ل (س < ك) = ٠,١٥

(١٥) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه μ وانحرافه المعيارى ٥ فأوجد قيمة μ التى تجعل ل (س ≥ ٤٥) تساوى :

أ ٠,٠٢٢٨
ب ٠,٩٣٣٢

(١٦) الربط بالطقس: إذا كانت درجات الحرارة خلال أحد الشهور تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٢٠° وانحرافه المعيارى $\frac{1}{3}$ ٣° فأوجد احتمال أن تكون درجة الحرارة بين ٢١°، ٢٥°

(١٧) الربط بالدخل: إذا كان الدخل اليومى لمجموعة مكونة من ١٠٠٠ عامل تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٤٠٠ جنيهًا وانحراف ٨٠ جنيهًا اختير أحد العمال عشوائيًّا فأوجد :

أ احتمال أن يكون دخل العامل يقل عن ٢٤٠ جنيهًا.

ب النسبة المئوية للعمال الذين يزيد دخلهم عن ٣٠٠ جنيه .

جـ عدد العمال المحصور دخلهم بين ٢٦٠ ، ٣٤٠ جنيهًا.

(١٨) الربط بالأجور: إذا كانت أجور مجموعة مكونة من ٥٠٠ عامل تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٦٠ وانحرافه المعيارى ١٢ فأوجد عدد العمال :

أ الذين أجورهم لا تزيد عن ٥٤ .
ب الذين لا تقل أجورهم عن ٨١ .

(١٩) درجات الامتحان: إذا كانت درجات الطلاب فى امتحان ما متغيرًا عشوائيًّا يتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ فأوجد :

أ احتمال الذين يحصلون على درجة أكبر من (μ - σ)

ب النسبة المئوية للطلاب الذين يحصلون على درجة محصورة بين : (μ - ٢ σ) ، (μ + ٢ σ) .

اختبار تراكمي

(١) صندوق به ١٥ كرة منها ٥ كرات حمراء مرقمة من ١ إلى ٥ ، ١٠ كرات سوداء مرقمة من ٦ إلى ١٥ سحبت كرة واحدة عشوائيًّا من هذا الصندوق .

أولًا : احسب احتمال كل من الحدثين التاليين :

أ حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو تحمل رقمًا فرديًّا.

ب حدث أن تكون الكرة المسحوبة سوداء وتحمل رقمًا زوجيًّا.

ثانيًا : هل أ ، ب حدثان متنافيان ؟ فسر إجابتك .

(٢) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلًا له دالة كثافة الاحتمال د(س) حيث :

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{ك (٢س - ١) عندما ١} \leqslant \text{س} \leqslant \text{٣} \\ \text{صفر فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد :

أ قيمة الثابت ك   ب ل (سـ $\leqslant$ ٢)

(٣) في دراسة للعلاقة بين حجم الدخل الشهرى (س) و حجم الادخار الشهرى (ص) بالجنيه المصرى لعينة مكونة من ٢٠ أسرة ، كانت لدينا البيانات التالية :

مجـ س = ٣٠٠٠   مجـ ص = ٣٠٠   مجـ س^{٢} = ٨٠٠٠٠٠

مجـ ص^{٢} = ٥٥٠٠   مجـ س ص = ٦٠٠٠٠

أ احسب معامل الارتباط الخطى بين حجم الدخل الشهرى والادخار للأسرة .

ب أوجد معادلة خط الانحدار .

جـ قدر المبلغ الذى تدخره شهريًّا أسرة دخلها الشهرى ٢٠٠٠ جنيه .

(٤) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا وكانت لديك الدالة :

$$\text{د(س)} = \frac{\text{س}^{٢} + \text{ك}}{١٨} \quad \text{حيث س = - ١ ، صفر ، ٢ ، ٣}$$

أ أوجد قيمة ك التى تجعل د(س) دالة توزيع احتمالى للمتغير سـ .

ب احسب المتوسط للمتغير سـ .   جـ أوجد ل (سـ $\leqslant$ ٢) .

(٥) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية ما وكان :

ل(أ) = $\frac{١}{٢}$ ،   ل(ب) = س ،   ل(أ ∪ ب)$'$ = $\frac{١}{٣}$

أولًا: أوجد قيمة س فى كل من الحالتين الآتيتين :

أ أ ، ب حدثان متنافيان .   ب أ ⊃ ب

ثانيًا: إذا كانت س = $\frac{١}{٤}$ فأوجد ل(أ ∩ ب).

⑥ الربط بالطول: إذا كانت أطوال مجموعة من الطلاب تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه μ وانحرافه المعيارى ٨ سم فأوجد قيمة μ إذا كان الطول المعيارى لطالب طوله ١٨٠ سم هو ١,٢٥ .

⑦ الربط بالإنتاج : إذا كان س ، ص متغيرين يمثلان حجم الإنتاج (س) و أجور العاملين (ص) بالألف جنيه مصريًّا لإحدى الشركات ، و كان لدينا البيانات التالية عن ٦ سنوات مختلفة .

حجم الإنتاج	١٠٠٠	٢٠٠٠	٢٥٠٠	٤٠٠٠	٢٣٠٠	٢٥٠٠
الأجور	١٥٠	٢٠٠	١٥٠	٧٠٠	١٨٠	٢٠٠

احسب قيمة معامل ارتباط الرتب بين حجم الإنتاج و الأجور ثم بين نوعه .

⑧ الربط بالحافز: إذا كان توزيع حوافز عمال أحد المصانع هو توزيع طبيعى متوسطه μ = ٧٥ جنيهًا وانحراف معيارى σ = ١٠ . أوجد النسبة المئوية لعدد العمال الذين:

أ تزيد حوافزهم عن ٩٠ جنيهًا .

ب تقل حوافزهم عن ٥٥ جنيهًا .

ج تتراوح حوافزهم بين ٦٠ ، ٨٠ جنيهًا .

⑨ الربط بالطقس: إذا كانت درجات الحرارة فى شهر يناير تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ١٦ درجة وانحرافه المعيارى ٤ درجات فأوجد احتمال أن تكون درجة الحرارة فى يوم ما خلال هذا الشهر : .

أ واقعة بين ١٤ درجة ، ٢٠ درجة   ب أكبر من ١٥ درجة .

⑩ ترشيد الطاقة: فى مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية الموفرة ، لوحظ أن عمر المصابيح المنتجة (بالأيام) يتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه μ وانحرافه المعيارى ٢٠ يومًا وأن ٤,٩٥ ٪ من المصابيح المنتجة يقل عمرها عن ١٠٠ يوم .

أ أوجد قيمة μ

ب من ضمن ١٠٠٠٠ مصباح من المصابيح المنتجة ، قدر عدد المصابيح التى يتراوح عمرها بين ١٠٠ ، ١٥٠ يومًا.

الاختبار الأول

يسمح باستخدام الآلة الحاسبة وجدول المساحات

السؤال الأول:

(أ) أكمل العبارات الآتية:

(١) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية حيث ل(بَ) = ٠,٦ فإن قيمة ل(أَ ∩ ب) + ل (أ) × ل (ب | أ) = ...

(٢) إذا كانت ص متغيرًا طبيعيًا معياريًا بحيث ل (ك ≤ ص ≤ ١,٥) = ٠,٠٣ فإن قيمة ك = ...

(٣) إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية حيث ل(أ) = ٠,٣ ل (ب) = ٠,٨ فإن ل (أ - ب) = ...

(٤) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا وكان التوقع يساوى ٥ ، Σ س$_{ر}^{٢}$ د(س$_{ر}$) = ٣٤ فإن الانحراف المعيارى يساوى ....

(٥) إذا كانت معادلة انحدار ص على س هى ص = ٠,٢ س + ٣ وكانت قيمة ص الجدولية عندما س = ٥ هى ٤,٦ فإن مقدار الخطأ فى قيمة ص تساوى ....

(ب)

أ ، ب حدثان حيث ل (أ) = ٠,٦ ، ل (أَ ∩ ب) = ٠,٢ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٣ فاحسب:

أ ل (ب | أ) ب ل (أَ | بَ)

السؤال الثانى:

(أ) الجدول الآتى يبين تقديرات ٦ طلاب فى مادتى الرياضيات (س) والإحصاء (ص) احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س ، ص وحدد نوعه.

س	ممتاز	مقبول	جيد	مقبول	جيد جدًا	جيد جدًا
ص	جيد جدًا	مقبول	مقبول	جيد	جيد	ممتاز

(ب) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطة μ = ١٠ وانحرافه المعيارى σ = ٢,٥

(١) أوجد ل (س ≤ ١٢,٥)

(٢) إذا كان ل (س ≥ ك) = ٠,١٠٥٦ فأوجد قيمة ك.

السؤال الثالث:

(أ) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متصلاً وكانت :

$$\begin{cases} \frac{\text{س} - ١}{٨} & \text{حيث } ١ \leqslant \text{س} \leqslant ٥ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

(١) أثبت أن د(س) هى دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائى س .

(٢) احسب ل (٢ > س > ٣)

(ب) إذا كان الدخل الشهرى لعدد ١٠٠٠ أسرة فى إحدى المدن هو متغير عشوائى طبيعى متوسطه ١٧٠٠ جنيه وانحرافه المعيارى ٢٠٠ جنيه واختيرت أسرة عشوائيًّا من هذه الأسر فأوجد عدد الأسر التى يزيد دخلها عن ١٥٠٠ جنيه.

السؤال الرابع :

(أ) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه {-٢، -١ ، صفر ، ١، ٢} وكان ل (س = ر) = $\frac{أ + ر}{١٥}$ لكل ر تنتمى إلى مدى س فأوجد قيمة أ ثم أوجد الانحراف المعيارى للمتغير س.

(ب) إذا كان : مجـس = ٤٩ ، مجـص = ٤٥ ، مجـس^٢ = ٣٥٩ ، مجـص^٢ = ٣٠٣، مجـس ص = ٣٢٠ ، ن = ٧

(١) احسب معامل الارتباط لبيرسون بين قيم س ، ص وعين نوعه.

(٢) قدر قيمة ص عندما س = ٩ باستخدام خط الانحدار .

الاختبار الثانى

يسمح باستخدام الآلة الحاسبة وجدول المساحات

السؤال الأول

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا أُلقي حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال ظهور العدد ٥ علمًا بأن العدد الظاهر فردى يساوى :

أ $\frac{١}{٤}$ ب $\frac{١}{٣}$ جـ $\frac{١}{٢}$ د $\frac{٣}{٤}$

(٢) إذا كان أ ، ب حدثين وكان ل(أ ∩ ب) = ٠,٢ ، ل (ب) = ٠,٤ فإن ل (أ | ب) يساوى

أ ٠,٥ ب ٠,٠٦ جـ ٠,١٤ د ٠,١

(٣) قيمة ك فى التوزيع الاحتمالى التالى هى:

سر	٣	٥	٨
د(س)ر	ك^٢	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$

أ $\frac{١}{٤}$ ب $\frac{١}{٢}$ جـ $\frac{٣}{٤}$ د ١

(٤) إذا كانت درجات فصل فى امتحان الإحصاء تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٧٦ وانحرافه المعيارى ٥ ، وحصل أحمد فى هذا الامتحان على ٦٦ درجة فإن درجة أحمد فى صورة معيارية هى :

أ ٣ ب -٢ جـ ١ د ٢

(٥) المعامل الذى يمثل أقوى علاقة بين متغيرين هو:

(أ) -٠,٥٨ (ب) ٠,٤٨ (ج) ٠,٦٨ (د) -٠,٧٨

(ب) صندوق يحوى ٩ كرات متماثلة فى الحجم والملمس ومرقمة بالأرقام ٠، ١، ٢، ... ٨ سحبت عشوائيًّا منه كرتان الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع ، احسب احتمال أن :

(١) الكرة الأولى تحمل رقمًا زوجيًّا والثانية تحمل رقمًا زوجيًّا (الحصول على رقمين زوجيين).

(٢) الكرة الأولى تحمل رقمًا فرديًّا والثانية تحمل رقمًا زوجيًّا.

السؤال الثانى:

(أ) من بيانات الجدول الآتى :

س	١٥٠	١٨٠	١٥٠	١٢٠	١٢٠	١٠٠
ص	١٢٠	١٢٠	١٠٠	٨٠	٨٠	١٠٠

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س ، ص.

(ب) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا وتوزيعه الاحتمالى كالآتى :

سر	١	٢	٤	٦
د(سر)	٠,٢	أ	٠,٤	٠,١

فأوجد قيمة أ ثم احسب قيمة كل من المتوسط والانحراف المعيارى للمتغير العشوائى سـ.

السؤال الثالث:

(أ) إذا كانت الأجور الشهرية لمجموعة من الموظفين فى إحدى الشركات تتوزع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط μ وانحراف معيارى σ = ٢٥٠ جنيهًا وكانت النسبة المئوية لعدد الموظفين الذين تزيد أجورهم عن ٢١٥٠ جنيهًا هى ٩٧,٧٢٪ فأوجد قيمة μ .

(ب) إذا كانت س متغيرًا عشوائيًّا متصلاً ، دالة كثافة الاحتمال له هى :

د(س) = { $\frac{1}{8}$ (س + ك) عندما ٢ ≤ س ≤ ٤
صفر فيما عدا ذلك

(١) أوجد قيمة ك (٢) أوجد ل (سـ < ٣)

السؤال الرابع :

(أ) إذا كان مجـ س = ٤٠ ، مجـ ص = ٣٠ ، مجـ س^2 = ٣٦٠ ، مجـ ص^2 = ٢٠٠ ، مجـ س ص = ٢٣٢ ، ن = ٥ فأوجد :

(١) معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين س ، ص .

(٢) معادلة خط انحدار ص على س ثم قدر قيمة ص عندما س = ٩

(ب) إذا كان صـ متغيرًا عشوائيًا معياريًا فأوجد قيمة ك إذا كان : ل (ص ≤ ك) = ٠,١١٧٠

الاختبار الثالث

السؤال الأول:

(أ) أكمل العبارات الآتية:

① إذا كان ل(ب) = $\frac{1}{2}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{5}{6}$ فإن ل (أ َ | ب َ) يساوى ....

② إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا مداه {٠، ١، ٢، ٣، ٤} وكان ل(سـ = ٠) = ل(سـ = ٤) = $\frac{1}{16}$ ، ل (سـ = ١) = ل (سـ = ٣) = $\frac{1}{4}$ فإن ل (سـ = ٢) يساوى ....

③ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هى :

$$د(س) = \begin{cases} أ & \text{عندما} \quad -٣ \leqslant س \leqslant ٣ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

فإن أ تساوى ....

④ إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين ، ل(أ) = ٠,٣ ل (ب) = ٠,٦ فإن ل (أ ∪ ب) = س فإن س = ...

⑤ إذا كانت أطوال مجموعة مكونة من ١٠٠٠ شخص تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطة $\frac{1}{2}$ ١٧٦ وانحرافه المعيارى ٥ فإن عدد الأشخاص الذين يزيد طول كل منهم عن ١٨٥ سم يساوى ..

(ب) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف فأثبت أن :

ل(ب) = ل(أ) × ل (ب | أ) + ل (أ َ) × ل (ب | أ َ) ثم استخدم ذلك فى حساب ل (ب)

إذا كان ل (أ) = ٠,٦ ، ل (ب | أ َ) = ٠,٨ ، ل(ب | أ) = ٠,٣

السؤال الثانى:

(أ) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هى :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{٢س + ١}{٢٤} & ، \quad ٢ \leqslant س \leqslant ٥ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

احسب كلًّا من :

① ل (٣ ≤ سـ ≤ ٥) ② ل (سـ ≤ ٤)

(ب) أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين المتغيرين س ، ص من بيانات الجدول الآتى :

س	١٠	١٦	١٥	١٧	١٨
ص	٥	٧	٨	٦	٩

السؤال الثالث:

(أ) إذا كانت سـ متغيرًا عشوائيًا متقطعًا وكان توزيعه الاحتمالى يعطى بالدالة د حيث

د(س) = $\frac{س}{١٠}$ ، س∋ { ١، ٢، ٣، ك} فأوجد :

① قيمة ك واكتب التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ.

② التوقع والتباين للمتغير العشوائى سـ.

(ب) إذا كانت سـ متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا وسطه الحسابى μ = ٥٠ ، وانحرافه المعيارى σ فأوجد σ إذا كان ل (سـ ⩾ ٣٧,٢٥) = ٠,٠٤٤٦

السؤال الرابع:

(أ) لدراسة العلاقة بين الكمية المطلوبة (ص) بالكيلو جرام والسعر (س) بالجنية لمنتج معين كان لدينا البيانات الآتية:

مجـ س = ٢٥ ، مجـ ص = ٣٠ ، مجـ س ص = ١٨١ ،

مجـ س^{٢} = ١٥٥ ، مجـ ص^{٢} = ٢٤٩ ، ن = ٥ أوجد:

① معامل الارتباط لبيرسون بين س ، ص.

② معامل انحدار الكمية المطلوبة على السعر.

(ب) إذا كان ل (ب | أ) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل (ب | أَ) = $\frac{٥}{٨}$ ، ل(أ) = $\frac{٣}{٤}$ أوجد ل (أ ∪ ب)

الاختبار الرابع

السؤال الأول:

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

① صندوق به ١٥ مصباحًا من بينها ٥ معيبة، إذا سحب مصباحان عشوائيًا الواحد تلو الآخر دون إحلال فإن احتمال أن يكون المصباحان معيبين هو :

أ $\frac{١}{٣}$ ب $\frac{٢}{٥}$ جـ $\frac{٢}{٧}$ د $\frac{٢}{٢١}$

② إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف وكان أ ⊃ ب فإن ل (ب/ أ) يساوى

أ ل(أ)   ب ل(ب)   جـ ل (أ -ب)   د ل (ف)

③ إذا كانت جميع النقاط فى شكل الانتشار تقع على خط مستقيم فإن معامل الارتباط بين المتغيرين يساوى :

أ -١   ب صفر   جـ $\frac{١}{٢}$ د $\frac{٣}{٤}$

④ قيمة ع فى التوزيع الاحتمالى التالى هى :

$س_ر$	-٢	-١	١	٢
$د(س_ر)$	٣ع	$\frac{١}{٤}$	٢ع	$\frac{١}{٣}$

أ $\frac{٥}{٧}$ ب ١ جـ $\frac{١}{١٢}$ د $\frac{١}{٣}$

⑤ إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س هو ك

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٣} & ، \quad ١ \leqslant س \leqslant ٤ \\ صفر & فيما عدا ذلك \end{cases}$$

فإن ل (س > ٢) = ...

أ $\frac{٢}{٣}$ ب $\frac{١}{٣}$ جـ $\frac{٣}{٤}$ د ١

(ب) أ ، ب حدثان من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية ، ل ($\overline{أ}$) = $\frac{١}{٤}$ ، ل (ب$'$ | أ) = $\frac{٢}{٥}$ فاحسب ل (أ ∩ ب)

السؤال الثانى:

(أ) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا توزيعه الاحتمالى كالآتى :

$س_ر$	صفر	١	٢	٣	٤
$د(س_ر)$	٠,٢٥	٠,٢	٠,١	٠,٣	٠,١٥

أوجد المتوسط والانحراف المعيارى للمتغير العشوائى س.

(ب) فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى فى كل مرة.

احسب احتمال وقوع الأحداث التالية :

① ظهور عددين مجموعهما أكبر من ٨

② ظهور عددين الفرق المطلق بينهما أصغر من ٢ بشرط مجموعهما أكبر من ٨

السؤال الثالث:

(أ) الجدول التالى يبين تقديرات ستة طلاب فى مادتى الفيزياء والرياضيات

تقديرات الفيزياء	مقبول	جيد	ممتاز	ضعيف	جيد جدًّا	جيد
تقديرات الرياضيات	مقبول	جيد جدًّا	جيد جدًّا	مقبول	ممتاز	ضعيف

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان مبينًا نوعه.

(ب) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متصلًا دالة كثافة الاحتمال له هي :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٤} (س + أ) & \text{حيث صفر} \leqslant س \leqslant ٢ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد قيمة أ ثم احسب ل $(\frac{١}{٢} \leqslant س \leqslant \frac{٣}{٢})$

السؤال الرابع:

(أ) إذا كان المتوسط لمتغير عشوائي يساوي ١٥٠ وكان معامل الاختلاف له يساوي ٢٪ أوجد التباين لهذا المتغير العشوائي.

(ب) في دراسة العلاقة بين الوزن س (بالكيلو جرام) والطول ص (بالسنتيمتر) لستة أشخاص وجد أن:

Σ س = ٣٧٤ ، Σ ص = ٩١٣ ، Σ س^٢ = ٢٤٣٦٤ ،

Σ ص^٢ = ١٩٣٦٢٤ ، Σ س ص = ٥٢٢٦٠ أوجد:

١) معامل الارتباط الخطي لبيرسون بين س ، ص.

٢) معادلة خط انحدار ص على س .

الاختبار الخامس

السؤال الأول:

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) إذا كان ل(أ´) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٤ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٢ فإن ل (أ | ب´) =

أ $\frac{١}{٢}$ ب $\frac{٥}{٦}$ ج ١ د $\frac{٣}{٤}$

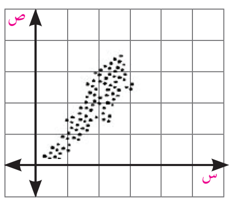
٢) قيمة المعامل الذي يمثل أقوى علاقة بين متغيرين هو:

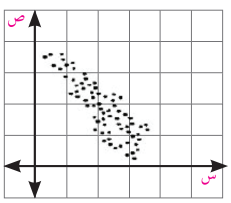
أ -٠,٢ ب ٠,١ ج -٠,٨ د ٠,٧

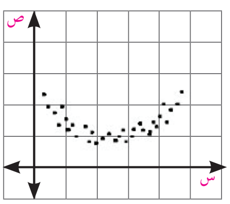
٣) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا مداه {١، ٢، ٣، ٥} ، وكان ل (س = ١) = ٢ ل (س = ٢) = $\frac{١}{٤}$ ، ل ((س = ٣) = $\frac{٧}{١٦}$ فإن ل (س = ٥) يساوي

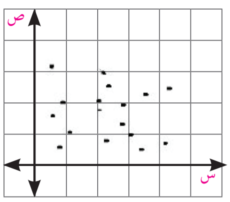
أ $\frac{٣}{٨}$ ب $\frac{٣}{١٦}$ ج $\frac{٣}{٤}$ د $\frac{١١}{١٦}$

٤) شكل الانتشار الذي يمثل ارتباط طردي هو

أ 

ب 

ج 

د 

(٥) إذا كان فى علاقة بين متغيرين س، ص $\sum س_ر \cdot د(س_ر) = ٤$ ، $\sum س_ر^٢ \cdot د(س_ر) = ٢٥$ فإن معامل الاختلاف يساوى:

(أ) ١٦٪ (ب) ٧٥٪ (جـ) ٦٤٪ (د) ١٥,٦٪

(ب) إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية ، ل (أ) = ٢ل(ب) = س ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٧}{٩}$ فأوجد قيمة س.

السؤال الثانى:

(أ) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متصلاً دالة كثافة الاحتمال له هى:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٣٢}(س + ٤) & \text{حيث } -ك \leqslant س \leqslant ك \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد:

(١) قيمة ك (٢) ل (س ≥ ٠) (٣) ل (-٢ ≥ س ≥ ٢)

(ب) الجدول التالى يبين التقديرات التى حصل عليها ثمانية طلاب فى إحدى الكليات فى مادتى الرياضيات والفيزياء:

تقديرات الرياضيات(س)	ممتاز	جيد	جيد جدًّا	جيد جدًّا	ضعيف	ممتاز	مقبول	جيد جدًّا
تقديرات الفيزياء(ص)	جيد جدًّا	جيد جدًّا	جيد	ممتاز	مقبول	ممتاز	مقبول	ممتاز

أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين التقديرات فى المادتين، وحدد نوعه.

السؤال الثالث:

(٤) إذا كانت أوزان الطلاب فى إحدى الكليات تتبع توزيعًا طبيعيًّا وسطه الحسابى ٥٥ كجم وانحرافه المعيارى σ وكانت أوزان ٣٣٪ من الطلاب تزيد عن ٦٦ كجم فأوجد :

(١) الانحراف المعيارى

(٢) إذا كان عدد الطلاب ١٠٠٠٠ طالب فاحسب عدد الطلاب الذين تقل أوزانهم عن ٦٠ كجم.

(ب) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا وسطه الحسابى μ = ٣ وتوزيعه الاحتمالى كما يلى:

$س_ر$	صفر	ك	٣	٤
$د(س_ر)$	م	$\frac{١}{٦}$	٤م	٥م

أوجد:

(١) قيمتى م ، ك (٢) الانحراف المعيارى ومعامل الاختلاف للمتغير س.

السؤال الرابع:

(أ) صندوق به خمس بطاقات متماثلة مرقمة من ١ إلى ٥ سحبت بطاقتان واحدة تلو الأخرى مع الإحلال. أوجد احتمال:

١) أن يكون مجموع العددين على البطاقتين عددًا أوليًّا.

٢) أن يكون حاصل ضرب العددين أقل من ٧ إذا كان مجموعهما عددًا أوليًّا.

(ب) في دراسة للعلاقة بين المتغيرين س ، ص حصلنا على النتائج التالية:

ن = ١٠ ، ∑ س = ٣٥ ، ∑ ص = ٦٠ ، ∑ س ص = ١٨٧

∑ س^{٢} = ١٣٤ ، ∑ ص^{٢} = ٤٠٦ فأوجد ك

١) معادلة خط انحدار ص على س .

٢) معامل الارتباط الخطي لبيرسون بين س ، ص ثم حدد نوعه.

الاختبار السادس

السؤال الأول:

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) أقوى معامل ارتباط فيمايلي هو:

أ ٠,٧ ب ١,٢ جـ -٠,٩ د -٠,٣

٢) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا مداه {١، ٢، ٣} فإن الدالة التي تمثل دالة التوزيع الاحتمالي هي :

أ د(س) = $\frac{س + ٢}{٨}$ ب د(س) = $\frac{س + ١}{٣}$ جـ د(س) = $\frac{س}{٦}$ د د(س) = $\frac{٢س + ٣}{٦}$

٣) في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد فردي إذا ظهر عدد أقل من ٤ هو :

أ $\frac{١}{٤}$ ب $\frac{٢}{٣}$ جـ $\frac{٣}{٤}$ د $\frac{١}{٢}$

٤) إذا كان أ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٥ ، ل(ب) = ٠,٦ فإن ل (أ ∪ ب) = ٠

أ ٠,٣ ب ١,١ جـ ٠,٨ د ٠,١

٥) إذا كان سـ متغيرًا طبيعيًّا وسطه μ = ٦ والانحراف المعياري له σ = ٣ فإن المتغير الذي يخضع لتوزيع طبيعي معياري هو:

أ $\frac{٦ - سـ}{٣}$ ب $\frac{سـ - ٣}{٦}$ جـ $\frac{سـ - ٦}{٣}$ د $\frac{٣ - سـ}{٦}$

(ب) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان ل (أ́) =٠,٦ ، ل(ب) = ٠,٣ ، ل (أ ∪ ب) =٠,٩

احسب ل (أ | ب́)

السؤال الثانى:

(أ) الجدول التالى يبين تقديرات ستة طلاب فى مادتى الرياضيات (س) والإحصاء (ص):

س	جيد	جيد جدًّا	ضعيف	ممتاز	مقبول	ضعيف
ص	مقبول	ضعيف	جيد	مقبول	جيد جدًّا	ممتاز

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س، ص وبين نوعه .

(ب) إذا كانت س متغيرًا عشوائيًّا متصلا

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{١٨}(س + ٢) & \text{حيث } -٢ \leqslant س \leqslant ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

اولاً: اثبت أن د(س) دالة كثافة إحتمال للمتغير العشوائى سـ :

ثانيًا: أوجد ل $(٠ \leqslant سـ \leqslant ٢)$

السؤال الثالث:

(أ) إذا كانت سـ متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ فأحسب .

① ل $(\mu \leqslant سـ \leqslant \mu + \sigma)$

② ل $(\mu - \frac{٧}{٤}\sigma \leqslant سـ \leqslant \mu + \frac{٧}{٤}\sigma)$

③ ل $(سـ - \mu \leqslant ١,٨\sigma)$

(ب) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا توزيعه الاحتمالى كالتالى :

$س_ر$	١-	٠	١	٢	٤
$د(س_ر)$	٢ل	ل	٣ل	٢ل	ل

أوجد قيمة ل ثم احسب المتوسط وتباين المتغير العشوائى سـ.

السؤال الرابع:

إذا كان :

$\sum س = ٥٤٠$ ، $\sum ص = ٤٦٠$ ، $\sum س^٢ = ٣٧١١٢$

$\sum ص^٢ = ٢٨٢٥٢$ ، $\sum س ص = ٣٠٧٨٢$ ، ن = ٨

أولًا: احسب معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين المتغيرين س ، ص.

ثانيًا: قدر قيمة ص عندما س = ٣٠ باستخدام معادلة خط الانحدار.

الاختبار السابع

السؤال الأول:

(أ) أكمل مايأتى:

① إذا وقعت النقطتان (٦، ٥) ، (٣، ٨) على خط انحدار ص على س فإن نوع الارتباط بين س ، ص يكون ....

② إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا مداه {-١، ٠، ك} ، دالة التوزيع الاحتمالى له هى د(س) = $\frac{س+٢}{٤}$ فإن ك = ...

③ إذا كان ل (أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل (أَ) = $\frac{١}{٤}$ فإن ل (ب | أ) = ...

④ إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٤ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٥٨ فإن ل (ب) = ...

⑤ إذا كانت س متغيرًا طبيعيًّا وسطه μ = ٤ وتباينه = ٢٥ فإن ل(س ≤ ١٤) = ...

(ب) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه الحسابى μ = ٥٥ وانحرافه المعيارى σ فأوجد التباين الذى يحقق أن: ل (س ≥ ٤٥) = ٠,٢٢٨ .

السؤال الثانى:

(أ) إذا كانت س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه {-٣، -٢، ١، ٢} وكان ل (س = -٣) = ل (س = -٢) = $\frac{١}{٨}$ ، ل (س = ٢) = $\frac{١}{٢}$،

احسب:

أولاً: ل(س = ١)

ثانيًا: التوقع والتباين للمتغير العشوائى س.

(ب) الجدول التالى يبين تقديرات ستة طلاب فى إمتحان مادتى الرياضيات والكيمياء

تقديرات الرياضيات	جيد جدًّا	ضعيف	مقبول	جيد	ممتاز	مقبول
تقديرات الكيمياء	مقبول	جيد	جيد جدًّا	مقبول	ضعيف	ممتاز

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان وبين نوعه .

السؤال الثالث:

(أ) إذا كانت س متغيرًا عشوائيًّا متصلاً دالة كثافة الاحتمال له هى :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٢٤} س + ك & حيث \quad ١ \leq س \leq ٥ \\ صفر & فيما عدا ذلك \end{cases}$$

فاحسب قيمة ك ثم أوجد ل (٢ ≤ س ≤ ٤)

(ب) إذا علم أن احتمال أن يكون الجو ممطرًا هو ٠,٢٤ واحتمال أن يكون الجو عاصفًا هو ٠,٣٦ واحتمال أن يكون الجو ممطرًا وعاطفًا هو ٠,١٤ فاحسب احتمال كل من الأحداث الآتية:

أولاً: أن يكون الجو ممطرًا أو عاصفًا.

ثانيًا: أن يكون الجو ممطرًا حيث إنه غير عاصف.

السؤال الرابع:

(أ) في دراسة للعلاقة بين متغيرين س ، ص إذا علم أن:

مجـ س = ٤٧٧ ، مجـ ص = ٢٢٢ ، مجـ س ص = ١٥١٨٤ ، مجـ س^{٢} = ٣٢٥٩٣ ،

ن = ٧ أوجد معادلة خط انحدار ص على س ثم قدر قيمة ص عندما س = ١٠٠

(ب) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه μ، انحرافه المعيارى σ = ٨ ، وكان ل(سـ > ٦٤) = ٠,٠٦٦٨

احسب المتوسط μ.

الاختبار الثامن

السؤال الأول:

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

① إذا كانت معادلة خط انحدار ص على س هى ص = ٠,٢ س + ٣ فإن قيمة ص المتوقعة عندما س = ٥ هى :

أ ٠,٢ ب ٣,٢ جـ ٣ د ٤

② إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا وكان التوقع يساوى ٣ ، مجـ سـر^{٢} • د(سـر) = ١٤,٥ فإن الانحراف المعيارى يساوى:

أ ١١,٥ ب ٥,٥ جـ ٤,٨ د ٢,٣٥

③ إذا كان ل(أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ-ب) = $\frac{٣}{٨}$ فإن ل (ب' | أ)= :

أ $\frac{٣}{٨}$ ب $\frac{٣}{٤}$ جـ $\frac{٩}{٣٢}$ د $\frac{٣}{١٦}$

④ إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٦ ، ل(ب) = ٠,٣ فإن ل (ب - أ) يساوى

أ ٠,٩ ب ٠,٣ جـ ٠,١٨ د ٠,١٢

⑤ إذا كان ص متغيرًا عشوائيًا معياريًا فإن : ل (ص ⩽ ١,٥) تساوى لأقرب رقمين عشريين :

أ ٢,٢٣ ب ١,٥١ جـ ٠,٠٧ د ١,٢١

(ب) فى تجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين مرة واحدة . احسب احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين فرديًا علمًا بأن العدد الظاهر على الوجه الأول هو ٤

السؤال الثانى:

(أ) إذا كانت سـ متغيرًا عشوائيًا متصلًا دالة كثافة الاحتمال له هى :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{١٢}(٢\,س + ١) & \text{حيث صفر} \leqslant س \leqslant ٣ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

احسب : **أولاً:** ل(سـ ⩽ ٢) **ثانيًا:** ل (١ ⩽ سـ ⩽ ٢).

(ب) الجدول التالى يبين درجات ستة طلاب فى مادتى الإحصاء والرياضيات

درجة الإحصاء	٢٢	٢٥	١٩	٢٤	٢٥	١٣
درجة الرياضيات	٤٥	٣٥	٤٠	٢٨	٤٠	٢٥

احسب معامل الارتباط لسبيرمان بين درجتى الإحصاء والرياضيات مبينًا نوعه .

السؤال الثالث :

(أ) فى امتحان الرياضيات كانت درجات الطلبة موزعه توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط قدره ٧٠ وانحراف معيارى ٥ احسب عدد الطلاب المحتمل أن تزيد درجاتهم عن ٧٨ إذا علم أن عدد الطلبة المتقدمين لهذا الامتحان ١٠٠٠٠ طالب.

(ب) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا توزيعه الاحتمالى كالتالى:

$س_ر$	-٢	-١	صفر	٣	٤
د($س_ر$)	$\frac{١}{٤}$ أ	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٣}{١٦}$	$\frac{١}{٨}$ أ	$\frac{٣}{٨}$

أوجد قيمة أ ثم أوجد المتوسط الحسابى والتباين للمتغير س.

السؤال الرابع:

(أ) فى دراسة للعلاقة بين متغيرين س ، ص حصلنا على النتائج التالية:

ن = ٧ ، $\sum$ س = ١٤٧ ، $\sum$ص = ٩٩ ، $\sum$س ص = ٢١٢٣

$\sum$س^{٢} = ٣٤٣٠

① أوجد معادلة خط انحدار ص على س ② قدر قيمة ص عندما س = ٢٠

(ب) أ ، ب حدثان مستقلان وكان ل (أ) = ٠,٦ ، ل (أ - ب) = ٠,٣٦ احسب ل (أ $\cup$ ب)

الاختبار التاسع

السؤال الأول:

(أ) أكمل مايأتى :

① إذا كانت ل (أ) = $\frac{٢}{٥}$ ، ل (ب | أ) = $\frac{١}{٢}$ فإن ل (أ $\cap$ ب) = ...

② إذا كان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س هو:

$س_ر$	-١	٠	٢
د($س_ر$)	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٢}$

فإن التوقع يساوى ....

(٣) إذا كان أ، ب حدثين مستقلين من ف ، ل (بَ) = ٠,٤ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٨ فإن ل (أ) = ...

(٤) فى معادلة خط انحدار ص على س : ص = ب س + أ إذا كان معامل س أقل من صفر فإن الارتباط بين المتغيرين س، ص يكون ....

(٥) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متوسطه ٧٥ وانحرافه المعيارى ٤ فإن ل (سـ > ٨٥) = ...

(ب) فصل دراسى به ٤٢ طالبًا منهم ٢٨ يدرسون الانجليزية، ٢١ يدرسون الايطالية، ٧ يدرسون اللغتين معًا، اختير طالب من هذا الفصل عشوائيًّا، احسب احتمال أن يدرس الطالب المختار:

أولاً: المادتين معًا **ثانيًا:** اللغة الإنجليزية إذا كان دارسا للإيطالية

السؤال الثانى:

(أ) من بيانات الجدول الآتى :

س	٩	١٢	١١	١٤	١٠	١٢
ص	١٥	٢٠	١٩	٢٣	١٧	١٨

أولاً: احسب معامل الارتباط لبيرسون وبين نوعه .

ثانيًا: باستخدام خط انحدار مناسب قدر قيمة ص واحسب قيمة الخطأ عندما س =١١

(ب) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل(بَ|أ) = ٠,٤ ، ل (أ |ب) =٠,٣ ، ل(أ) + ل (ب) = ٠,٣٦ فأوجد ل(أ)، ل (أ∪ ب)

السؤال الثالث:

(أ) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلا

$$د(س) = \begin{cases} \frac{1}{8} س & \text{حيث } ٣ \leqslant س \leqslant ٥ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أولاً: أثبت د(س) دالة كثافة للمتغير العشوائى س

ثانيًا: أوجد ل (س < ٤)

(ب) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا وسطه الحسابى μ = ١٥ وانحرافه المعيارى σ = ٥ أوجد

(١) ل (١٢ < س < ١٧) (٢) قيمة ك حيث ل (سـ < ك) = ٠,٣٤٤٦

السؤال الرابع:

(أ) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متقطعًا مداه {٠، ١، ٣، ٥} وكان ل(سـ = ٠) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (س = ١) = $\frac{١}{٦}$ ، ل (س = ٣) = $\frac{١}{٤}$

فأوجد:

أولاً: التوزيع الاحتمالى للمتغير سـ **ثانيًا:** المتوسط الحسابى ومعامل الاختلاف للمتغير س

(ب) صندوق يحتوى على ٧ كرات بيضاء ، ٨ كرات حمراء ، ٥ سوداء ، سحبت كرتان على التوالى دون إحلال احسب احتمال:

أولاً: أن تكون الكرة الثانية بيضاء إذا كانت الأولى بيضاء.

ثانيًا: أن تكون الكرة الأولى حمراء والكرة الثانية حمراء.

الاختبار العاشر

السؤال الأول:

(أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا مداه {٠، ١، ٢، ٣} وكان ل (س = ٠) = $\frac{١}{٨}$ ، ل (س = ٢) = $\frac{١}{٢}$ ل (س = ٣) = $\frac{١}{٤}$ فإن ل (س = ١) تساوى ....

أ $\frac{١}{٤}$ ب $\frac{١}{٨}$ ج $\frac{١}{٢}$ د ١

٢) إذا كان ل (أ - ب) = ٠,٠٤ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,١ فإن ل (ب َ | أ) يساوى :

أ ٠,٣ ب ٠,٥ ج ٠,٠٤ د ٠,٨

٣) إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين ، ل (أ) = ٠,٣ ، ل (ب َ) = ٠,٤ فإن ل (أ ∪ ب) يساوى ....

أ ٠,٣ ب ٠,٧ ج ٠,٩ د ٠,٦

٤) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا وسطه الحسابى μ = ٤٥ وانحرافه المعيارى σ = ٥ فإن ل (س ≤ ٥٥) يساوى ....

أ ٠,٤٧٧٢ ب ٠,٩٧٧٢ ج ٠,٠٢٢٨ د ٠,٢٣٨٦

٥) إذا كانت معادلة خط انحدار ص على س هى : ص = ٣ - س فإن الارتباط بين قيم س ، قيم ص يكون :

أ منعدمًا ب طرديًا ج عكسيًا د تامًا

(ب) إذا كانت درجات الطلاب فى إحدى المدارس تتبع توزيعًا طبيعيًا وسطه الحسابى μ = ٤٢ وانحرافه المعيارى σ حيث حصل ٢٦,١١٪ من الطلاب على أكثر من ٥٠ درجة أوجد σ.

السؤال الثانى:

(أ) أوجد معامل الارتباط لسبيرمان من بيانات الجدول التالى وبين نوعه :

س	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص	٣٥	١٢	١٧	٢٥	١٢	٧

(ب) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل (أ∪ ب) = ٠,٨ ، ل(ب) = ٠,٤ ، ل (أ َ) =٠,٣
احسب ل (بَ | أ)

السؤال الثالث :

(أ) س متغير عشوائى متصل دالة كثافة الاحتمال له هى:

د(س) = { $\frac{١}{٦}$ س + ك حيث ٠ ≤ س ≤ ٣
صفر فيما عدا ذلك

أوجد قيمة ك ثم أوجد ل (١,٥ ≤ س ≤ ٢,٥)

(ب) إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين من فضاء عينة لتجربة عشوائية و كان ل(ب) = ٠,٤ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٢٤
فاحسب ل (أ∪ بَ) ، ل (أ∪ ب)

السؤال الرابع:

(أ) حجرا نرد منتظمان، الأول كتب على كل وجهين متقابلين منه أحد الأعداد ١، ٣، ٥ والثانى كتب على كل وجهين متقابلين منه أحد الأعداد ٢، ٤، ٦ فإذا أُلقِي الحجران وكان المتغير العشوائى س يعبر عن مجموع العددين الظاهرين فأوجد التوزيع الاحتمالى للمتغير س واحسب التوقع ومعامل الاختلاف.

(ب) البيانات التالية تمثل الإنفاق ص والدخل س بالجنيه فى اليوم لعينة:

س	٥٠	٦٠	٤٥	٧٠	٦٥	٩٠
ص	٤٥	٣٥	٣٥	٥٠	٥٥	٧٠

أولاً: قدر الإنفاق إذا كان الدخل ٦٣

ثانيًا: احسب الخطأ عندما س = ٤٥

جدول المساحات أسفل المنحنى الطبيعى المعيارى

ى	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٠٠٠٠	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٨٠	٠,٠١٢٠	٠,٠١٦٠	٠,٠١٩٩	٠,٠٢٣٩	٠,٠٢٧٩	٠,٠٣١٩	٠,٠٣٥٩
٠,١	٠,٠٣٩٨	٠,٠٤٣٨	٠,٠٤٧٨	٠,٠٥١٧	٠,٠٥٥٧	٠,٠٥٩٦	٠,٠٦٣٦	٠,٠٦٧٥	٠,٠٧١٤	٠,٠٧٥٣
٠,٢	٠,٠٧٩٣	٠,٠٨٣٢	٠,٠٨٧١	٠,٠٩١٠	٠,٠٩٤٨	٠,٠٩٨٧	٠,١٠٢٦	٠,١٠٦٤	٠,١١٠٣	٠,١١٤١
٠,٣	٠,١١٧٩	٠,١٢١٧	٠,١٢٥٥	٠,١٢٩٣	٠,١٣٣١	٠,١٣٦٨	٠,١٤٠٦	٠,١٤٤٣	٠,١٤٨٠	٠,١٥١٧
٠,٤	٠,١٥٥٤	٠,١٥٩١	٠,١٦٢٨	٠,١٦٦٤	٠,١٧٠٠	٠,١٧٣٦	٠,١٧٧٢	٠,١٨٠٨	٠,١٨٤٤	٠,١٨٧٩
٠,٥	٠,١٩١٥	٠,١٩٥٠	١٩٨٥.٠	٠,٢٠١٩	٠,٢٠٥٤	٠,٢٠٨٨	٠,٢١٢٣	٠,٢١٥٧	٠,٢١٦٠	٠,٢٢٢٤
٠,٦	٠,٢٢٥٩	٠,٢٢٩١	٠,٢٣٢٤	٠,٢٣٥٧	٠,٢٣٨٩	٠,٢٤٢٢	٠,٢٤٥٤	٠,٢٤٨٦	٠,٢٥١٧	٠,٢٥٤٩
٠,٧	٠,٢٥٨٠	٠,٢٦١١	٠,٢٦٤٢	٠,٢٦٧٣	٠,٢٧٠٤	٠,٢٧٣٤	٠,٢٧٦٤	٠,٢٧٩٤	٠,٢٨٢٣	٠,٢٨٥٢
٠,٨	٢٨٨١	٠,٢٩١٠	٠,٢٩٣٩	٠,٢٩٦٧	٠,٢٩٩٥	٠,٣٠٢٣	٠,٣٠٥١	٠,٣٠٧٨	٠,٣١٠٦	٠,٣١٣٣
٠,٩	٠,٣١٥٩	٠,٣١٨٦	٠,٣٢١٢	٠,٣٢٣٨	٠,٣٢٦٤	٠,٣٢٨٩	٠,٣٣١٥	٠,٣٣٤٠	٠,٣٣٦٥	٠,٣٣٨٩
١,٠	٠,٣٤١٣	٠,٣٤٣٨	٠,٣٤٦١	٠,٣٤٨٥	٠,٣٥٠٨	٠,٣٥٣١	٠,٣٥٥٤	٠,٣٥٧٧	٠,٣٥٩٩	٠,٣٦٢١
١,١	٠,٣٦٤٣	٠,٣٦٦٥	٠,٣٦٨٦	٠,٣٧٠٨	٠,٣٧٢٩	٠,٣٧٤٩	٠,٣٧٧٠	٠,٣٧٩٠	٠,٣٨١٥	٠,٣٨٣٠
١,٢	٠,٣٨٤٩	٠,٣٨٦٩	٠,٣٨٨٨	٠,٣٩٠٧	٠,٣٩٢٥	٠,٣٩٤٤	٠,٣٩٦٢	٠,٣٩٨٠	٠,٣٩٩٧	٠,٤٠١٥
١,٣	٠,٤٠٣٢	٠,٤٠٤٩	٠,٤٠٦٦	٠,٤٠٨٢	٠,٤٠٩٩	٠,٤١١٥	٠,٤١٣١	٠,٤١٤٧	٠,٤١٦٢	٠,٤١٧٧
١,٤	٠,٤١٩٢	٠,٤٢٠٧	٠,٤٢٢٢	٠,٤٢٣٦	٠,٤٢٥١	٠,٤٢٦٥	٠,٤٢٧٩	٠,٤٢٩٢	٠,٤٣٠٦	٠,٤٣١٩
١,٥	٠,٤٣٣٢	٠,٤٣٤٥	٠,٤٣٥٧	٠,٤٣٧٠	٠,٤٣٨٢	٠,٤٣٩٤	٠,٤٤٠٦	٠,٤٤١٨	٠,٤٤٢٩	٠,٤٤٤١
١,٦	٠,٤٤٥٢	٠,٤٤٦٣	٠,٤٤٧٤	٠,٤٤٨٤	٠,٤٤٩٥	٠,٤٥٠٥	٠,٤٥١٥	٠,٤٥٢٥	٠,٤٥٣٥	٠,٤٥٤٥
١,٧	٠,٤٥٥٤	٠,٤٥٦٤	٠,٤٥٧٣	٠,٤٥٨٢	٠,٤٥٩١	٠,٤٥٩٩	٠,٤٦٠٨	٠,٤٦١٦	٠,٤٦٢٥	٠,٤٦٣٣
١,٨	٠,٤٦٤١	٠,٤٦٤٩	٠,٤٦٥٦	٠,٤٦٦٤	٠,٤٦٧١	٠,٤٦٧٨	٠,٤٦٨٦	٠,٤٦٩٣	٠,٤٦٩٩	٠,٤٧٠٦
١,٩	٠,٤٧١٣	٠,٤٧١٩	٠,٤٧٢٦	٠,٤٧٣٢	٠,٤٧٣٨	٠,٤٧٤٤	٠,٤٧٥٠	٠,٤٧٥٦	٠,٤٧٦١	٠,٤٧٦٧
٢,٠	٠,٤٧٧٢	٠,٤٧٧٨	٠,٤٧٨٣	٠,٤٧٨٨	٠,٤٧٩٣	٠,٤٧٩٨	٠,٤٨٠٣	٠,٤٨٠٨	٠,٤٨١٢	٠,٤٨١٧
٢,١	٠,٤٨٢١	٠,٤٨٢٦	٠,٤٨٣٠	٠,٤٨٣٤	٠,٤٨٣٨	٠,٤٨٤٢	٠,٤٨٤٦	٠,٤٨٥٠	٠,٤٨٥٤	٠,٤٨٥٧
٢,٢	٠,٤٨٦١	٠,٤٨٦٤	٠,٤٨٦٨	٠,٤٨٧١	٠,٤٨٧٥	٠,٤٨٧٨	٠,٤٨٨١	٠,٤٨٨٤	٠,٤٨٨٧	٠,٤٨٩٠
٢,٣	٠,٤٨٩٣	٠,٤٨٩٦	٠,٤٨٩٨	٠,٤٩٠١	٠,٤٩٠٤	٠,٤٩٠٦	٠,٤٩٠٩	٠,٤٩١١	٠,٤٩١٣	٠,٤٩١٦
٢,٤	٠,٤٩١٨	٠,٤٩٢٠	٠,٤٩٢٢	٠,٤٩٢٥	٠,٤٩٢٧	٠,٤٩٢٩	٠,٤٩٣١	٠,٤٩٣٢	٠,٤٩٣٤	٠,٤٩٣٦
٢,٥	٠,٤٩٣٨	٠,٤٩٤٠	٠,٤٩٤١	٠,٤٩٤٣	٠,٤٩٤٥	٠,٤٩٤٦	٠,٤٩٤٨	٠,٤٩٤٩	٠,٤٩٥١	٠,٤٩٥٢
٢,٦	٠,٤٩٥٣	٠,٤٩٥٥	٠,٤٩٥٦	٠,٤٩٥٧	٠,٤٩٥٩	٠,٤٩٦٠	٠,٤٩٦١	٠,٤٩٦٢	٠,٤٩٦٣	٠,٤٩٦٤
٢,٧	٠,٤٩٦٥	٠,٤٩٦٦	٠,٤٩٦٧	٠,٤٩٦٨	٠,٤٩٦٩	٠,٤٩٧٠	٠,٤٩٧١	٠,٤٩٧٢	٠,٤٩٧٣	٠,٤٩٧٤
٢,٨	٠,٤٩٧٤	٠,٤٩٧٥	٠,٤٩٧٦	٠,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٨	٠,٤٩٧٩	٠,٤٩٧٩	٠,٤٩٨٠	٠,٤٩٨١
٢,٩	٠,٤٩٨١	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٣	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٥	٠,٤٩٨٥	٠,٤٩٨٦	٠,٤٩٨٦
٣,٠	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٨	٠,٤٩٨٨	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٩٠	٠,٤٩٩٠
٣,١	٠,٤٩٩٠	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٣
٣,٢	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥
٣,٣	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٧
٣,٤	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٨
٣,٥	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨

اجابات التمارين

الوحدة الأولى : الارتباط والانحدار

إجابات تمارين (١ – ١)

(١) د (٢) د (٣) ب (٤) جـ

(٥) د (٦) ٠,٩ ر ≃ ٠,٩٤٧ طردى

(٧) ٠,٨٨٥٧ (٨) - ٠,٩٨٥ عكسى

(٩) ٠,٣٣٧٥ طردى (١٠) - ٠,٤١ عكسى

(١١) - ٠,٧٤ عكسى (١٢) ≃ - ٠,٩١ عكسى

(١٣) ٠,٧٢٨٥٧١٤ (١٤) ٠,١٦٦ طردى

(١٥) ٠,٨٥٤٥ طردى (١٦) ٠,٨٦٦١ طردى

إجابات تمارين (١ – ٢)

(١) ب (٢) ب (٣) جـ (٤) أ

(٥) د (٦) د

(٧) ص = ٠,٧ + ٠,٧٢٣ س ،

≃ ٩,٣٧٦

(٨) أ ≃ ٨,٨٥٩٢ ب = ١,٢٨٦٨

(٩) أ ≃ ٠,٦٩٩٩٩ ب ص = ٢,٨س - ١٢,٤

(١٠) أ ص = ٣٦,٨٥ - ٠,٦٣٣٣س

ب - ٠,٩٢٣٧ عكسى

(١١) أ - ٠,٩١٥٢٢٧ عكسى

ب ص = ٩٤,٤٩٣ - ٩,٥٦٢٨ س

(١٢) أ ٠,٧٦٨٥٦ طردى.

ب ص = ٨,٤٨٢٥ + ٠,٤٠٣٨١ س

جـ ص ≃ ٢٨,٦٧ جنيه

د ٢٨ الخطأ = ٣,٣٧

(١٣) أ ص =١,٣٥ س - ٠,٣٧٥

ب ≃ ٩٤٤,٦٣ .

إجابات تمارين عامة

(١) أ (٢) جـ (٣) د (٤) د

(٥) ب (٦) أ

(٧) ر ≃ ٠,٤٧ طردى

(٨) ر ≃ ٠,٩٣١ طردى

(٩) ر ≃ ٠,٨١ طردى.

(١٠) ر ≃ -٠,٤١ عكسى

(١١) ر ≃ ٠,٨٩٣٣٧

(١٢) أ ر ≃ ٠,٥٥٢٩٦

ب ص = ٢,٨٢٢٣ + ٠,٣٢٤٩ س ص ≃ ٥,٠٩٦

(١٣) ر ≃ ٠,٩٣ ، صَ ≃ ١١

(١٤) أ ص = ١١,٥٤٨٣ - ٢٠٥٣, س

ب ص ≃ ٣,٣٣٤٨٥٨

جـ الخطأ = |٣,٣٣٤ - ٤,٧٧| ≃ ١,٤٣٩

إجابة أختيار تراكمى

(١) أ (٢) حـ (٣) حـ (٤) أ

(٥) حـ (٦) ب

(٧) اذا كانت الإشارة موجبة فالأرتباط طردى، واذا كانت الإشارة سالبة فالأرتباط عكسى.

(٨) أ ر ≃ - ٠,٥٢١١

ب صَ = ١٣٥,١٧ - س ،صَ ≃ ٧٣,١٧

جـ الخطأ = | ٧٢ - ٦٩,١٧| = ٢,٨٣

(٩) أ ر ≃ - ٠,٩٤٢٦

ب صَ = ١٠,٣٨ - ٠,١٥٤ س

جـ ٤,٢٢

د الخطأ ≃ ١,٥٢٨

الوحدة الثانية: الاحتمال الشرطى

إجابات تمارين (٢ – ١)

(١) ب (٢) أ (٣) $\frac{١}{٣}$ (٤) $\frac{١}{٢}$

(٥) أ

(٦) أولاً: ٠,٢١ ثانيًا: ٠,٨٩

ثالثًا: ٠,٥٢٥ رابعًا: $\frac{١٩}{٣٠}$

(٧) $\frac{٣}{٥}$ (٨) أولًا: $\frac{٢}{٥}$ ثانيًا: $\frac{٢٩}{٣٥}$

(٩) $\frac{٢}{٣}$ (١٠) أولًا: $\frac{١}{٦}$ ثانيًا: $\frac{١}{٢}$

(١١) ٠,٤٢ (١٢) أولًا: $\frac{١١}{١٥}$ ثانيًا: $\frac{٣}{٥}$ ثالثًا: $\frac{١}{٣}$

(١٣) أولاً: $\frac{١}{١١}$ ثانيًا: $\frac{١}{٤}$ ثالثًا: $\frac{٤}{٩}$

(١٤) $\frac{١}{٤}$ (١٥) أولاً: $\frac{١}{١٠}$ ثانيًا: $\frac{٧}{١٦}$

(١٦) $\frac{٣}{٤}$ (١٧) أولاً: $\frac{٤}{١١}$ ثانيًا: $\frac{٥}{٣٣}$ ثالثًا: $\frac{٣٥}{١٣٢}$

(١٨) أولاً: $\frac{٢٦}{٣٥}$ ثانيًا: $\frac{٥٥}{١١٣}$

(١٩) أولاً: $\frac{٥}{٧}$ ثانيًا: $\frac{١}{٢}$ ثالثًا: $\frac{١٣}{٣٠}$

(٢٠) أولاً: $\frac{٣}{٤}$ ثانيًا: $\frac{١}{٢}$ ثالثًا: $\frac{٣}{١٦}$ رابعًا: $\frac{١٣}{١٤}$

(٢١) نشاط: أولاً: $\frac{٥}{٦}$ ثانيًا: $\frac{٢}{٣}$

إجابات تمارين (٢ - ٢)

(١) أ ، جـ ، ز أحداث مستقلة .

ب ، د، هـ ، و أحداث غير مستقلة

(٢) جـ (٣) ب (٤) د (٥) $\frac{١}{١٢}$

(٦) $\frac{١}{١٦}$ (٧) أ ، ب حدثان مستقلان

(٨) أولاً : ٠,٢ ثانيًا: $\frac{٢}{٧}$

(٩) $\frac{١}{٤}$ (١٠) $\frac{١}{١٥}$

(١١) أ $\frac{٣}{٩٥}$ ب $\frac{٩}{١٩٠}$

جـ $\frac{١٥}{١٩٠}$ د $\frac{٢}{٩٥}$

(١٢) أولاً: أ ٠,٢٨ ب ٠,٨٢

جـ ٠,٥٤ د ٠,٧٢

ثانيًا: $\frac{٢}{٥}$

إجابات التمارين العامة

(١) جـ (٢) ب (٣) د (٤) جـ

(٥) أ (٦) $\frac{١}{١٠}$ (٧) $\frac{٢}{٥}$

(٨) ل (أ ∩ ب) = ل (أ) × ل (ب) = $\frac{٣}{٨}$

(٩) أ $\frac{٥}{٩٦}$ ب $\frac{١٥}{٩٦}$ جـ $\frac{١}{١٦}$ د $\frac{٣}{١٦}$

(١٠) $\frac{١}{٢}$ $\frac{١}{٨}$ ١

(١١) أ $\frac{١}{٦}$ ب $\frac{٥}{٩}$ جـ $\frac{٤}{٩}$

(١٢) أ ٠,٤٨ ب ٠,٩٢ جـ ٠,٨

(١٣) أ $\frac{٩}{٦٥}$ ب $\frac{٢٤}{٦٥}$ جـ $\frac{١٦}{٦٥}$ د $\frac{١٦}{٦٥}$

(١٤) أ $\frac{١}{٥}$ ب $\frac{١}{٤}$

(١٥) أ $\frac{١٦}{٢٥}$ ب $\frac{٣}{٤}$ جـ $\frac{١}{٥}$

(١٦) أ $\frac{١}{٤}$ ب $\frac{٢}{٩}$

إجابة الاختبار التراكمى

(١) صفر (٢) $\frac{١}{٦}$ (٣) $\frac{٢}{٥}$ (٤) ١

(٥) ب (٦) ب (٧) جـ (٨) - $\frac{٤٥}{٥٦}$

(٩) أ $\frac{١٤}{١٥}$ ب $\frac{١}{٣}$ جـ $\frac{١}{٥}$

(١٠) أ $\frac{٣٣}{٩٥}$ ب $\frac{٢١}{٩٥}$ جـ $\frac{١٤}{٩٥}$

الوحدة الثالثة: المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

إجابات تمارين (٣ - ١)

(١) جـ (٢) أ (٣) ب (٤) أ

(٥) د (٦) د

(٧) أ $\frac{١}{٨}$ ب $\frac{١}{١٠}$ جـ - $\frac{٤}{٥}$ (٨) ٠,١

(٩) م = ١

سر	- ٢	٠	٢	٤
د (سر)	$\frac{١}{٥}$	$\frac{٢}{٥}$	$\frac{١}{٥}$	$\frac{١}{٥}$

(١٠) أ = ٣

سر	١	٢	٣	٤
د (سر)	$\frac{٩}{٥٤}$	$\frac{١٢}{٥٤}$	$\frac{١٥}{٥٤}$	$\frac{١٨}{٥٤}$

(١١) ك = ٥

سر	١	٢	٣	٤
د (سر)	$\frac{٨}{٥٠}$	$\frac{١١}{٥٠}$	$\frac{١٤}{٥٠}$	$\frac{١٧}{٥٠}$

(١٢)

سر	٣-	١-	١	٣
د (سر)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$

(١٣)

سر	٦	٧	٨	٩	١٠
د (سر)	$\frac{١}{٩}$	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{٣}{٩}$	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{١}{٩}$

(١٤)

سر	١	٢	٣	٤	٥	٦
د (سر)	$\frac{١١}{٣٦}$	$\frac{٩}{٣٦}$	$\frac{٧}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{١}{٣٦}$

(١٥)

سر	١	١,٥	٢	٢,٥	٣	٣,٥	٤
د (سر)	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{٣}{١٦}$	$\frac{٤}{١٦}$	$\frac{٣}{١٦}$	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{١}{١٦}$

(١٦) مدى س = {٠، ١، ٢، ٣}

سر	٠	١	٢	٣
د(سر)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$

(١٧) نشاط :

سر	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
د(سر)	$\frac{١}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{١}{٣٦}$

أولًا: (أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٢}$

(جـ) $\frac{٥}{٦}$ (د) $\frac{١٥}{٣٦}$

ثانيًا: القيمة المتوقعة ٧

إجابات تمارين (٣ - ٢)

(١) ب (٢) ب (٣) جـ (٤) $\mu = \frac{١١}{٣}$

$\sigma = \sqrt{٥}$

(٥) $\mu = -\frac{٢٣}{٢٤}$ $\sigma \simeq ٢,٥١$

(٦) $\mu = \frac{٥}{١٢}$ $\sigma \simeq ١,٥٥$

(٧) **أولًا:** أ = ٠,٤ **ثانيًا:** $\mu = ٣$ ∴ $\sigma \simeq ١,٥٥$

(٨) $\mu = ٢,٦$ $\sigma^٢ = ٠,٩٦$

(٩) **أولًا:** $\frac{١١}{١٦}$ **ثانيًا:** $n = ٢$ ، $\sigma^٢ = ١$

(١٠) **أولًا:** ح = $\frac{١}{٣}$

ثانيًا: التوزيع الاحتمالي:

سر	-٣	صفر	٣	٦
د(سر)	$\frac{٣}{٩}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{٣}{٩}$

$\mu = \frac{٥}{٣}$ $\sigma^٢ \simeq ١٤,٢$

(١١) أ = ٦ ، $\sigma^٢ = ١,٥٥$

(١٢) **أولًا:** أ = $\frac{١٣}{٢}$ **ثانيًا:** $\mu = \frac{٧}{٣}$ $\sigma^٢ = \frac{٥}{٩}$

(١٣) **أولًا:** أ = ١٨ **ثانيًا:** معامل الاختلاف = ٣٧,٧٪

(١٤) **أولًا:** م = -١ **ثانيًا:** $\mu = \frac{٥}{٨}$ ، $\sigma^٢ = \frac{١٣٥}{٦٤}$

(١٥) **أولًا:** أ = $\frac{٢٠}{١٩}$ **ثانيًا:** $\mu = \frac{٢٣}{١٩}$ ، $\sigma^٢ = ١,٢$

(١٦) **أولًا:** ل (س = ٠) = $\frac{١}{٨}$ ل (س = ٢) = $\frac{٥}{٨}$

ثانيًا: معامل الاختلاف = ١٣٢,٣٪

(١٧) **أولًا:** أ = $\frac{١}{١٢}$ ∴ ك = ٣ **ثانيًا:** $\sigma = ١,١٥$

إجابات تمارين (٣ - ٣)

(١) ب (٢) أ (٣) أ

(٤) **أولًا:** $\frac{١}{٤}$ **ثانيًا:** $\frac{٧}{٢}$

(٥) **أولًا:** $\frac{٣}{٤}$ **ثانيًا:** $\frac{٥}{١٢}$

(٦) **أولًا:** د (س) دالة كثافة **ثانيًا:** $\frac{٢٠}{٢٧}$

(٧) **أولًا:** $\frac{٤}{٩}$ **ثانيًا:** $\frac{٧}{٩}$

(٨) **أولًا:** أ = $\frac{١}{٨}$ **ثانيًا:** $\frac{١}{٢}$

(٩) **أولًا:** أ = ٠ **ثانيًا:** $\frac{١}{٢}$

(١٠) **أولًا:** أ = $\frac{١}{٤}$ **ثانيًا:** $\frac{١}{٢}$

(١١) **أولًا:** ك = ٨ **ثانيًا:** $\frac{٣}{١٦}$

(١٢) **أولًا:** $\frac{١}{٤}$ **ثانيًا:** $\frac{٧}{٢}$

(١٣) **أولًا:** أ = ١ **ثانيًا:** ب = ٢

إجابات التمارين العامة للوحدة الثالثة

(١) حـ (٢) أ (٣) أ

(٤)

سر	-٣	-١	٠	١	٣
د(سر)	$\frac{١}{٩}$	$\frac{٣}{١٨}$	$\frac{٤}{٩}$	$\frac{٣}{١٨}$	$\frac{١}{٩}$

(٥) ∴ م = -١

سر	-٢	-١	١	٢
د(سر)	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{٣}{١٦}$	$\frac{٥}{١٦}$	$\frac{٦}{١٦}$

(٦) أ = $\frac{١}{٧}$ $\frac{٥}{١٤}$

(٧)

سر	١	٢	٣	٤	٥	٦
د(سر)	$\frac{١}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٧}{٣٦}$	$\frac{٩}{٣٦}$	$\frac{١١}{٣٦}$

(٨) **أولًا:**

سر	٠	٢	٤
د(سر)	$\frac{٣}{٩}$	$\frac{٤}{٩}$	$\frac{٢}{٩}$

ثانيًا: $\frac{٧}{٩}$

٩

$س_ر$	٣	٥	٧	٩	١١
$د(س_ر)$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{٣}{٩}$	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{١}{٩}$

μ = ٧ ، $\sigma \simeq$ ٢,٣٠٩٤

١٠

$س_ر$	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
$د(س_ر)$	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{٣}{١٦}$	$\frac{٤}{١٦}$	$\frac{٣}{١٦}$	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{١}{١٦}$

μ = ٥ ، $\sigma \simeq$ ١,٥٨١

١١ ب = $\frac{١}{٦}$ ، أ = ٣ $\sigma \simeq$ ١,٠٨

١٢ **أولًا:** $\frac{٣}{٨}$ **ثانيًا:** $\frac{٢٧}{٣٢}$

١٣ **أولًا:** أ = ٢   **ثانيًا:** $\frac{٧}{١٦}$

حل اختبار تراكمي على الوحدة الثالثة

١ $\frac{٥}{١١}$ **٢** ٢,١٦   **٣** ٠,٣٨   **٤** ٠,٣٨

٥ **أولًا:** $\frac{١}{٣}$ **ثانيًا:** $\frac{٢}{٣}$

الوحدة الرابعة: التوزيع الطبيعي

اجابة تمارين (٤-١)

١ أ ٠,٣٧٤٩ ، ٠,٤٩٢٢   ب ٠,٠١٦٠ ، ٠,٤٤٨٤

ج ٠,٥١٦ ، ٠,٩٠١   د ٠,٩٤٤٧ ، ٠,٦٩٧١

هـ ٠,٠٧٥٧ ، ٠,٠٦٦٩   و ٠,١٦٠٩ ، ٠,١٣٣٧

ز ٠,٠٧٤٩ ، ٠,٠٢٠٢   ح ٠,٨٧٢٩ ، ٠,٩٨٩٨

ط ٠,٧٤٢٢ ، ٠,٩٢٢٢   ى ٠,٣٢٦٤ ، ٠,٠٥٤٨

٢ أ ١,٠٦   ب -١,٣٥   ج ٠,٢٨   د ١,٩٧

هـ -٠,٨٥   و ١,٣٢   ز -٢,٦١

ح -٠,٨٤   ط ٠,٦٥   ى -٠,٣٣

٣ أ -٠,٩٤ ، ٠,٧٨١٨   ب ٢,٠٤ ، ٠,٢٦٧٠

ج ١,٢٥ ، ٠,٦٥٢٤   د ١,٨٣ ، ٠,٩٦٦٤

هـ ٢,٦٧ ، ٠,٩١٥٤   و -١,٣ ، ٠,٦٧٦٦

٤ أ σ = ٨   ب σ = ٧,٥   ج μ = ٤٠

د μ = ٦٠   هـ μ = ٥٠   و ٠,٥٨

ز ك = ٣٨   ح ك = ٨٠   ط ك = ٥٢

٥ أ ك = ١٣٧,٥   ب μ = ٤٥

ج **أولًا:** ك = ١٠,٥   **ثانيًا:** ٠,٨٤١٣

د ٠,٢٩٠٢

هـ **أولًا:** ١,٩١   **ثانيًا:** ك = ١,٦٥

و **أولًا:** ٠,١١٥١   **ثانيًا:** ٠,٥٤٠٣

ز **أولًا:** ٠,٠٤٤٦   **ثانيًا:** ٠,٨١٨٥

ح **أولًا:** ٠,٨٢٧٤   **ثانيًا:** ٥٢,٥

ط **أولًا:** ٠,٦٢٤٧   **ثانيًا:** ٠,٨٤١٣

ى **أولًا:** ٠,٠٤٠١   **ثانيًا:** ٠,٦١٤٧

ك **أولًا:** ٠,١٠٥٦   **ثانيًا:** ١٠,٥

اجابة تمارين (٤-٢)

١ ٠,٦٢٤٧ ، ٨٤١ أسرة   **٢** ٤٩,٦٧٪ ، ١٥٩ طالب

٣ ٦٢ تلميذًا.   **٤** ١٥٤٧ طالب

٥ أ ٢٠ أسرة   ب ٤٦٥ جنيها

٦ أ ٠,١٠٥٦   ب ١٧٩ أسرة

٧ ٠,٩٥٢٥   **٨** ٤٤٢ عامل

٩ أ ٠,٨٤١٣   ب ٠,٠٩٢٨

١٠ أ ٠,٦٤٥١   ب ٠,٢١١٩

ج ٠,٢٣٨٢

١١ أ ٩٧٧ شاب   ب ٦٧ شاب

١٢ ١٦

١٣ أ σ = ١١,٣٦   ب ٥٨٧ طالب

١٤ أ ٪ ٤٩,٦٧   ب ١٥٩ طالب

١٥ σ = ١٢,٥   **١٦** ٥ طلاب

١٧ ٩٧١ اسطوانة   **١٨** ٠,٨٤١٧

١٩ μ = ١٧٠

٢٠ أ ٠,٨٤١٣   ب ٠,٩٥٤٤

٢١ μ = ٥٠

٢٢ أ ٠,٥٣٢٨   ب ٠,٥٩٨٧

٢٣ أ ٠,٩٨٣٥   ب ٠,١٩٤٩

اجابة تمارين عامة على الوحدة الرابعة

١ ٠,٠٢٢٨   **٢** μ = ٧٧,٦

(٣) σ = ٧,٥

(٤) أ ٠,٧٧٣٤ ب ٠,٨٠١٢ جـ ٠,٩٣٣٢

(٥) μ = ١٦، σ = ٤

(٦) أ ٠,٩٥٤٤ ب ٠,١٥٣٥

(٧) أ μ = ٢٥ ب μ = ٢٠ جـ σ = ١٠

(٨) أ ٠,٠٢٢٨ ب ك = ٤٠

(٩) أ أ = ٩٩,٣٦ ب ٠,٠٠٦٢

جـ ٠,٠٢٢٨ د ٠,٧٨٨٨

(١٠) أ μ = ٤٨ ب ٠,٤٠١٣

(١١) أ ١,٢٥ ب ١,٢٢

(١٢) أ ٠,٥ ب ٠,٥ جـ ٠,٦٨٢٦ د ٠,٠٢٢٨

هـ ٠,٨١٨٥ و ٠,٣٨٣٠

(١٣) أ أ = ٠,٩٣ ب أ = ١,٤٨

(١٤) ك = ٩٠,٦

(١٥) أ μ = ٥٥ ب μ = ٣٧,٥

(١٦) ٠,٣١٥٣

(١٧) أ ٠,٠٢٢٨ ب ٨٩,٤٤٪

جـ ١٨٧ عامل

(١٨) أ ١٥٤ عامل ب ٢٠ عامل

(١٩) أ ٠,٨٤١٣ ب ٩٥,٤٤٪

حل أختبار تراكمى الوحدة

(١) أولًا: أ $\frac{٢}{٣}$ ب $\frac{١}{٣}$

ثانيًا: نعم لأن تقاطعهم هو ϕ

(٢) أ $\frac{١}{٦}$ ب $\frac{١}{٢}$

(٣) أ ٠,٨

ب ص = ٠,٠٤٢٨٥٧١ س + ٨,٥٧١٤٣٥

جـ ص = ٩٤,٢٩

(٤) أ ك = ١ ب ٢$\frac{١}{٩}$ جـ $\frac{٤}{٩}$

(٥) أولًا: أ $\frac{١}{٦}$ ب $\frac{٢}{٣}$ ثانيًا: $\frac{١}{١٢}$

(٦) ١٧٠ سم

(٧) ٠,٥٢٨٥٧ طردى